揚力面理論(Lifting Surface Theory)

비행기와 같이 공기보다 무거운(heavier than air) 물체를 들어올리는데는 날개의 揚力(Lift)이 필수적이다.

최초로 장시간 비행물체를 날게 한 Wright 형제(1903)와 날개 단면에서 양력의 발생 Mechanism을 설명한 Kutta(1902)와 Joukowski(1906) 및 2차원 날개에 대한 양력 및 3차원 날개에서의 유기항력에 관한 이론적 기반을 마련한 Prandtl 등에 의해 양력면 이론이 정립되게 되었다.

1. Uniform Flow + 회전하는 Cylinder

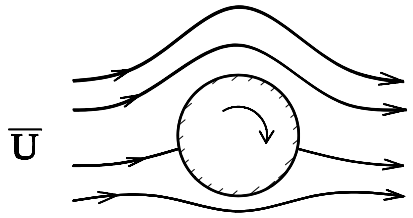


Fig. 1

속도 $\overline{U}$의 uniform flow 中에 반경 a인 실린더가 회전할 경우 속도 potential은

$$\phi = \overline{U}\cos\theta\left(r + \frac{a^2}{r}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad ①$$

여기서 Γ는 미지량으로 회전운동에 의한 실린더 주위의 순환값이다.

원주 上에서 속도분포는

$$u_\theta = -2\,\overline{U}\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (r = a) \quad ②$$

따라서 원주 上에서 압력분포는

$$P = P_\infty + \frac{1}{2}\rho\,\overline{U}^2\left[1 - \left(\frac{\Gamma}{2\pi\,\overline{U}a} + 2\sin\theta\right)^2\right] \quad ③$$

양력은 압력 P의 y 방향 성분을 원주표면에 걸쳐 적분한 것으로

$$L = -\int_0^{2\pi} p\sin\theta d\theta$$

$$= -\frac{\rho\overline{U}^2}{2}\,a\int_0^{2\pi}\left[1 - \left(\frac{\Gamma}{2\pi\overline{U}a} + 2\sin\theta\right)^2\right]\cdot\sin\theta d\theta \quad ④$$

다시 쓰면

$$L = \rho \overline{U_a}^2 \frac{\Gamma}{\pi \overline{U} a} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \rho \overline{U} \Gamma \qquad ⑤$$

즉 실린더가 회전하여 주위에 Γ란 순환이 생길 경우, 실런더에는 $\rho U \Gamma$라는 揚力이 발생함을 알 수 있다.

2. Airfoil에서의 揚力

Fig. 2 (a)

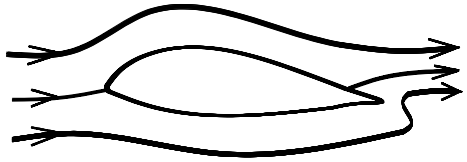


Fig. 2 (b)

그림과 같이 Airfoil을 갑자기 균일류에 닿게 하면 처음에는 Fig 2(b)와 같은 유장이 형성된다. 즉 밑을 돌아 흐르는 흐름이 후연에서 큰 곡률을 가지고 속도가 매우 빨라지고 날개의 back에서 diving stream line이 형성된다.

이는 Prandtl과 Tietjens가 고속 카메라를 이용 촬영한 결과이다.

한편 후연 밑부분의 경계층에서 아주 작은 점성효과 때문에, 매우 빠른 흐름은 방해를 받아 불연속면이 형성되고, 처음 빠른 속도로 돌아 흘렀던 유체 입자들은 하나의 vortex를 만들게 된다.

Fig. 2 (c)

Helmholtz의 정리에 의해 이 vortex들은 늘 같은 유체입자로 구성되고, 흐름과 함께 뒤로 씻겨 간다(washed away). 이를 starting vortex라고 한다. 그때의 유장은 Fig 2(c)와 같다.

이러한 유선하에서는 날개의 윗면의 유속이 상대적으로 아랫면보다 빠르게 되고, 이 유속차에 의해 Bernoulli 정리의 결과, 아랫면의 압력이 윗면보다

커져 아래에서 위로 날개를 미는 힘이 생기게 된다. 이 힘을 揚力(Lift)이라 한다.

한편, starting vortex가 생김으로써 wing 주위의 유장이 바뀌게 되어 마치 starting vortex와 크기가 같고 방향이 다른 순환 $-\Gamma$가 wing에 추가된 듯한 유장이 된다.

이 Γ(또는 $-\Gamma$)는 wing의 위와 아래를 흐르는 흐름이 Fig 2(b)처럼 만나지 않고 Fig 2(c)처럼 trailing edge에서 만날 때까지만 성장하게(값이 커지게) 된다.

즉, 두 흐름이 Trailing edge에서 만나면 Kutta Condition이 이루어졌다고 말하고, Starting vortex는 더 이상 성장하지 않고 뒤로 씻겨간다.

여기서 양력의 본질이 바로 이 starting vortex의 생성에 있고, 또 starting vortex는 유체의 점성에 기인한다는 것을 명심해야 한다. 즉 유체가 점성을 갖지 않으면, 아무리 시간이 흘러도 Fig 2(b)와 같은 유장만이 형성되고, 따라서 양력은 발생치 않는다는 것이다.

일단 Fig 2(c)와 같은 유장이 날개 주위에 형성되면, 날개 상하면에서 압력차에 의해 양력을 구할 수가 있다.

유체역학자들은 이 사실에 착안하여 이상유체의 가정 하에 다음과 같은 방법으로 Fig 2(c)의 유장을 인위적으로 합성하였다.

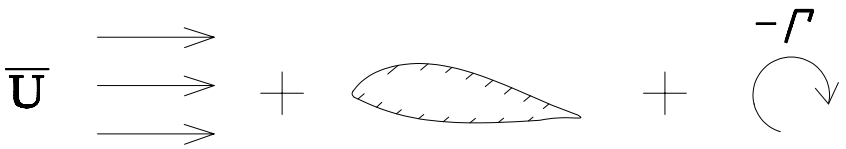


Fig. 3

Fig. 3과 같이 Uniform flow에 wing을 합하고, wing 주위에 순환 $-\Gamma$를 합함으로써 마치 실제유체 中에서 날개 주위에 유장과 같은 유장을 만들어 낼 수 있었다.

이제 유장이 속도 potential로 표시되면 상·하면에서 압력을 구할 수 있고, 이 압력을 상·하 방향으로 적분하여 양력을 구할 수 있게 된다.

이와 같이, 양력은 유체의 점성에 의한 힘이지만, potential 이론으로 구할 수 있었다.

그러나 wing에 생기는 抗力(Drag)은 위와 같은 방법으로도 구할 수 없다. 그 이유는 Drag는 wing 표면에 발생하는 점성에 의한 전단응력에 의한 힘

이기 때문이다.

이제 wing 상·하면의 압력을 압력계를 사용하여 계측한 결과를 보자.

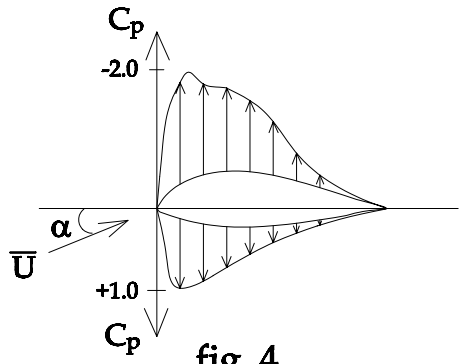


fig. 4

그 결과 윗면은 큰 -압력이 작용하고, 아랫면은 +압력이 작용함을 알 수 있다. 또 wing의 先緣 부근에 압력이 크게 작용함을 알 수 있다. 보통 wing의 상면을 Back 또는 Suction Side라 부르고 하면을 Face 또는 Pressure Side라 부른다. 이 압력분포곡선으로 포위된 면적이 바로 양력이 된다.

한편, 앙각 α를 키우면 양력 L도 커지나 이는 어느 정도 한계가 있다.

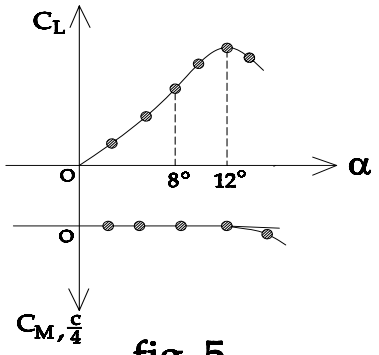


fig. 5

예를 들어 $\alpha = 80°$일 때 L_1이라는 양력이 발생하고 있을 때 α를 $10°$로 키우면 $L_2 = L_1 + \Delta L$이 되고, 따라서 ΔL에 대응하는 $\rho u \Delta \Gamma$가 날개 주위에 추가로 생겨야 한다. 이는 $\Delta \Gamma$란 크기의 부가적 starting vortex가 다시 wing으로부터 방출돼야 함을 의미한다.

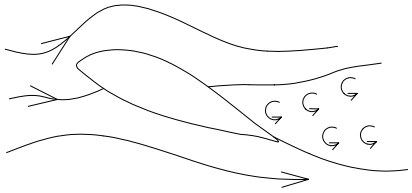
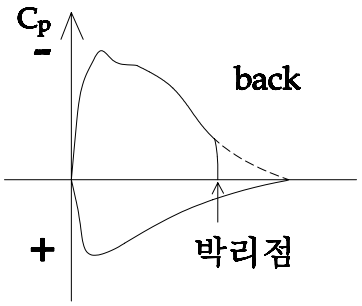


Fig. 6



한편 α를 어떤 임계각(≒12°) 이상 키우면 양력이 급격히 떨어진다. 이는 Fig. 6과 같이 Back에서 흐름이 박리(separation)를 일으켜, 더 이상 suction pressure를 생기게 하지 못하기 때문에 양력이 갑자기 감소하는 것이다.

이러한 현상을 失速(stall)이라 한다. 비행기의 고도를 갑자기 높이거나, 낮출 경우 이 stall 현상이 발생하여 비행기가 급강하하여 지면과 충돌할 수 있다. 따라서 비행기의 이·착륙시 앙각 변화

는 엄격한 제한규정을 갖고 있다.

Wing 이론에서 양력과 더불어 중요한 요소는 그 양력의 작용 위치이다. 이는 비행기의 자세 유지와 밀접한 연관을 갖고 있다.

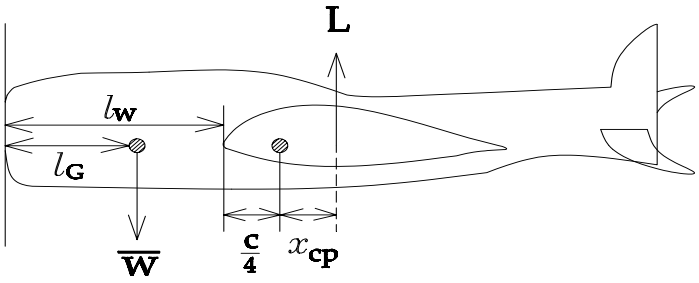


Fig. 7

비행기 선단에서 무게중심까지 거리를 l_G, 비행기 선단에서 날개의 L.E. 까지의 거리를 $l_{\overline{W}}$라 하면 비행기가 수평을 유지하기 위해서는

$$l_G \times \overline{W} = \left(l_{\overline{W}} + \frac{c}{4} + x_{cp} \right) \times L$$

을 만족하여야 한다.

x_{cp}는 양력 L의 작용 위치이다.

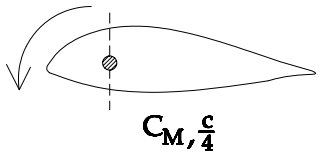


Fig. 8

보통 wing에 작용하는 Moment는 $\frac{c}{4}$ 점을 기준으로 L.E.가 pitch down이 되는 방향을 -로 잡고 있다.

평판의 경우 $C_{M,\frac{c}{4}} = 0$이 되고, 두께를 가진 wing의 경우 이 압력중심이 $\frac{c}{4}$ 보다 뒤로 가게 되고, 따라서 두께가 있는 wing의 $C_{M,\frac{c}{4}}$는 -값을 갖는다.

한편, 이 $C_{M,\frac{c}{4}}$는 넓은 앙각 범위에 걸쳐 일정한 값을 갖는 것이 바람직하므로 이를 위해 날개 형상을 여러 가지로 개발하게 된다.

참고로, 넓은 앙각에 걸쳐 C_M값이 변화하지 않는 어떤 점을 찾아낼 수가 있는데 이 점을 'Aerodynamic Pressure Center'라고 한다.

3. 2차원 평판 wing의 양력

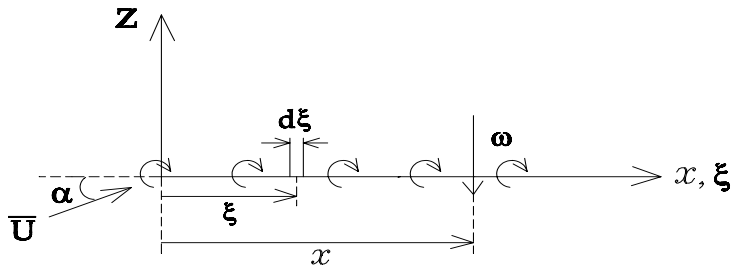


fig. 9

2차원 평판(코드 : c)을 따라 강도 $\gamma(\xi)$ 인 vortex가 분포되어 있다고 하자.

그러면 x점에서 vortex $d\xi$에 의해 유기되는 하향속도 dw는

$$dw = -\frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} \tag{3.1}$$

이 된다. vortex $w(x)$는 $\xi = 0 \rightarrow c$사이에 분포되어 있으므로 이들 전체 효과는

$$w(x) = -\int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} \tag{3.2}$$

chord line이 경계가 되기 위해서는

$$w(x) + \overline{U}\sin\alpha = 0 \tag{3.3}$$

α가 작다고 가정하면

$$\overline{U}\,\alpha - \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} = 0 \tag{3.4}$$

다시 쓰면

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{x-\xi} = \overline{U}\,\alpha \tag{3.5}$$

이를 풀기 위해 좌표변환을 하자.

$$\xi = \frac{c}{2}(1-\cos\theta) \tag{3.6}$$

$$x = \frac{c}{2}(1-\cos\theta_0) \tag{3.7}$$

그러면 $d\xi = \frac{c}{2}\sin\theta\, d\theta$

이제, 적분은 $\theta = 0$ (L.E.)에서 $\theta = \pi$ (T.E.)까지로 바뀐다.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\gamma(\theta)\sin\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}\,d\theta = \overline{\mathrm{U}}\,\alpha \tag{3.8}$$

이를 풀면

$$\gamma(\theta) = 2\alpha\overline{\mathrm{U}}\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \tag{3.9}$$

따라서 wing 주위에 대한 순환 Γ는

$$\Gamma = \int_0^{c}\gamma(\xi)\,d\xi \tag{3.10}$$

$\gamma(\xi)$ 에 (3.9)식을 대입하면

$$\Gamma = \frac{c}{2}\int_0^{\pi}\gamma(\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \alpha c\overline{\mathrm{U}}\int_o^{\pi}(1+\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \pi\alpha c\overline{\mathrm{U}} \tag{3.11}$$

따라서 Kutta-Joukowski 정리에 의해

$$L = \rho\overline{\mathrm{U}}\Gamma = \pi\rho c\alpha\,\overline{\mathrm{U}}^{2} \tag{3.12}$$

양력계수 C_L은

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho\,\overline{\mathrm{U}}^{2}\mathrm{c}} = 2\pi\alpha \tag{3.13}$$

즉 앙각이 작은 범위 내에서 양력은 앙각에 비례하며 그 비례계수(양력 경사)는 2π임을 알 수 있다.

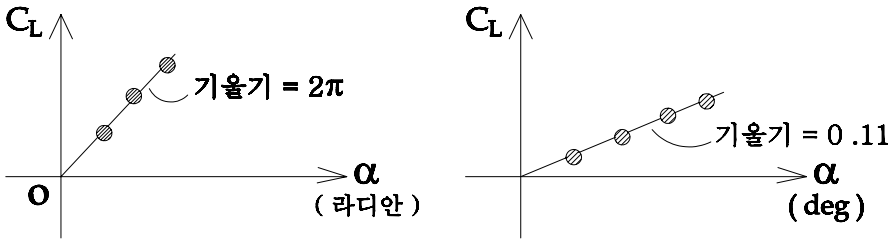


Fig. 10

Leading edge에 대한 모멘트는 다음과 같이 계산한다.

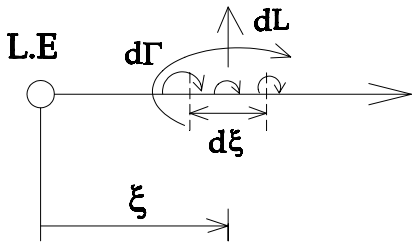


fig. 11

L.E.에서 ξ만큼 떨어진 곳의 vortex 요소 $\gamma(\xi)d\xi$를 생각하면

이 요소에 의한 순환 $d\Gamma$는

$$d\Gamma = \gamma(\xi)d\xi \tag{3.14}$$

또 양력은

$$dL = \rho\,\bar{u}\,d\Gamma \tag{3.15}$$

이 양력에 의한 L.E.에 대한 모멘트 dM은

$$dM = -\xi \cdot dL \tag{3.16}$$

따라서 전체 vortex sheet에 의한 모멘트는

$$M_{LE} = -\int_0^c \xi dL = -\rho\,\overline{U}\int_0^c \xi\gamma(\xi)d\xi \tag{3.17}$$

다시, 변수변환을 통하여 이를 풀면

$$M_{LE} = -\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2 \cdot c^2 \cdot \frac{\pi\alpha}{2} \tag{3.18}$$

따라서 모멘트 계수는

$$C_{M,\,L.E.} = \frac{M_{L.E.}}{\frac{1}{2}\rho\,\overline{U}^2 c^2} = -\frac{\pi\alpha}{2} \tag{3.19}$$

한편 앞에서

$\pi\alpha = \frac{C_L}{2}$ 이므로

$$C_{M,\,L.E.} = -\frac{C_L}{4} \tag{3.20}$$

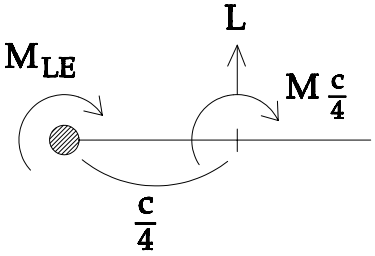


Fig. 12

또한 Fig. 12에서

$$M_{L.E.} = -\frac{c}{4}L + M_{\frac{c}{4}} \tag{3.21}$$

이므로 양변을 $\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2c^2$으로 무차원화하면

$$\frac{-\frac{c}{4}\cdot L}{\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2c^2} = -\frac{1}{4}C_L$$

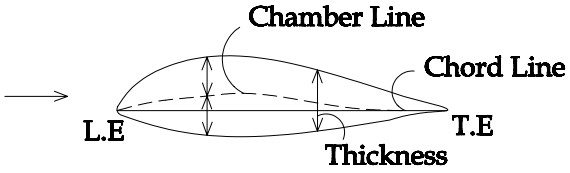
$$C_{M,\frac{c}{4}} = C_{M,L.E.} + \frac{C_L}{4} \tag{3.22}$$

따라서

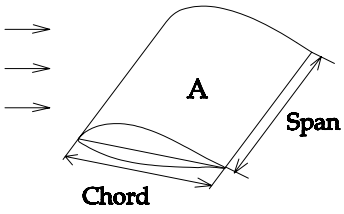
$$C_{M,\frac{c}{4}} = 0 \tag{3.23}$$

즉 평판의 경우 양력의 작용점은 L.E.로부터 $\frac{1}{4}c$ 되는 곳에 있다. wing이 두께를 가지면 이 양력의 작용점은 $\frac{1}{4}c$ 보다 뒤로 오게 된다.

4. 3차원 wing (유한폭 wing)



(2차원 Wing)



(3차원 Wing)

Fig. 13

$$\Lambda = \frac{s}{c} = \frac{A}{c^2} = \frac{s^2}{A}$$

실제의 wing은 유한폭(span)을 가진 3차원 wing이다. 이 경우 양쪽 wing tip에서는 상·하면의 압력차에 의해 밑에서 위로 흐름이 새게(Leak) 된다. 이 흐름은 하나의 vortex filament를 만들어 하류로 흘러간다.

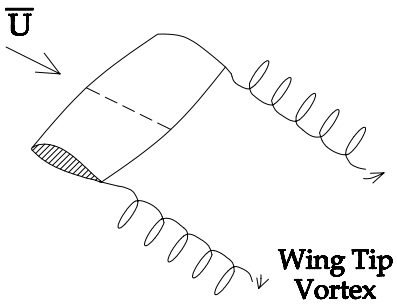


Fig. 14

그 결과 Fig. 14와 같이 한 쌍의 free vortex를 형성한다. 보잉-747의 경우 이 tip vortex는 매우 강하여 보잉기가 착륙 후, 활주로에는 상당시간 이 tip vortex가 남아 있어, 다음에 착륙하는 경비행기에 심한 요동을 줄 수 있다.
tip vortex들에 의해 wing 부근에 하향 유속이 유기된다.

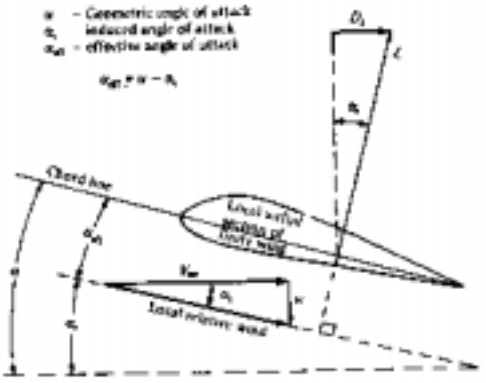


Fig.15

Fig. 15에서와 같이 이 하향흐름 (down-wash)에 의해 입사류 $\overline{U}$의 방 향이 $\Delta\alpha$만큼 줄어들게 되어 결과적인 앙각은

$$\alpha_{eff} = \alpha - \Delta\alpha \quad (4.1)$$

이 된다.

그 결과 양력도 free stream과 직각

방향에서 $\Delta\alpha$ 만큼 경사되어 작용하고 L 의 sine 성분

$$D_i = L \sin \Delta\alpha \tag{4.2}$$

은 wing에 작용하는 抗力(Drag)이 된다. 이 D_i 를 誘導抗力(induced drag)이라고 한다.

이 유도항력은 항력이지만 유체의 점성과는 무관한 종류의 힘이다. 따라서 유도항력은 이상유체 中의 potential 이론으로 계산이 가능하다.

4.1 Biot-Savart 법칙

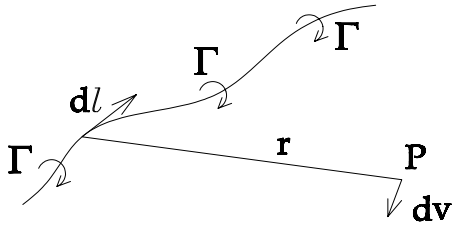


Fig. 16 Vortex Filament

Fig. 16과 같이 무한히 계속되는 한 vortex filament의 요소 dl에 의해 임의점 P에 유기되는 유기속도는

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{\gamma}}{|\gamma|^3} \tag{4.3}$$

이 식을 Biot-Savart 법칙이라 한다.

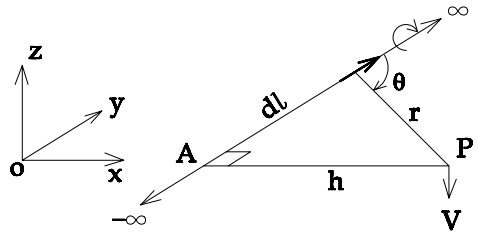


Fig. 17

이제 Fig. 17과 같이 y축 상에 강도 Γ인 vortex filament가 있다고 하고, 그 요소 dl에 의해 점 P에 유기되는 하향속도는 식 (4.3)으로 표시되고 전체 filament에 의한 유기속도는

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{\gamma}}{|\gamma|^3} \tag{4.4}$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\theta}{\gamma^2} dl \tag{4.5}$$

여기서

$$\gamma = \frac{h}{\sin\theta} \tag{4.6}$$

$$l = \frac{k}{\tan\theta} \tag{4.7}$$

이라 하면

$$dl = -\frac{h}{\sin^2\theta}\,d\theta \tag{4.8}$$

따라서

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\theta}{\gamma^2}\,dl = \frac{\Gamma}{4\pi h}\int_{\pi}^{0}\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi h} \tag{4.9}$$

따라서 A점에서 ∞까지 잇는 半 filament에 의한 유기속도는

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h} \tag{4.10}$$

가 된다.

비점성, 비압축성 흐름에 있어 vortex filament의 개념을 처음으로 도입한 것은 독일의 수학자요 물리학자이며 내과의사였던 Hermann von Helmholtz였다. 그는 vortex 이론에 있어 다음과 같은 Helmholtz vortex theorem을 제창하였다.

1. vortex filament의 강도는 그 길이 방향으로 일정하다.
2. vortex filament는 유체 中에서 끝이 날 수 없다.

즉 유체의 경계(이는 ±∞에 있을 수 있다)에서 끝나거나, 또는 폐곡선을 형성해야 한다.

4.2 Prandtl의 Lifting-Line 이론

유한폭의 wing에 대한 이론적 해법은 1911~1918년 사이 독일의 Göttingen 대학의 Prandtl에 의해 처음으로 제시되었다.

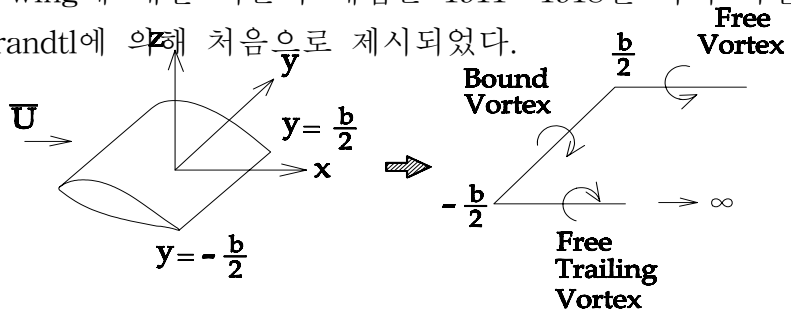


Fig. 18

Prandtl은 Fig. 18과 같이 유한폭의 wing을 하나의 vortex system으로 치환하였다. 이와 같은 모양의 vortex system은 마치 말의 징(horse-shoe,馬?)

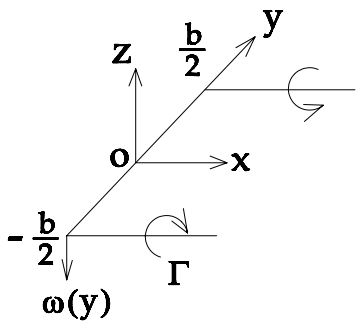


Fig. 19

과 같아, 이름을 horse-shoe-vortex라 붙였다.

Fig. 19와 같이 Bound vortex 가운데에 원점을 잡고, bound vortex 上의 임의의 점 y에 있어서, 두 free vortex (강도 Γ)에 의해 유기되는 속도 $w(y)$는 (4.10)식에 의해

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi\left(\frac{b}{2}+y\right)} - \frac{\Gamma}{4\pi\left(\frac{b}{2}-y\right)} \tag{4.11}$$

이를 다시 쓰면

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{b}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \tag{4.12}$$

이 결과를 보면 양 tip에서 $w\left(\pm\frac{b}{2}\right) \rightarrow -\infty$ 가 되어 실제의 유한폭 wing과 동떨어진 결과가 된다.

이로 인해 초기에 Prandtl과 그 동료들은 많은 고민을 하였고, 나중에 간단히 해결책을 찾아냈다.

즉 wing을 한 개의 horseshoe vortex로 표기하지 않고 강도가 각각 다른 여러 개의 horseshoe vortex들을 y축 상에 배치하는 것이다.

이를 Lifting line이라 한다.

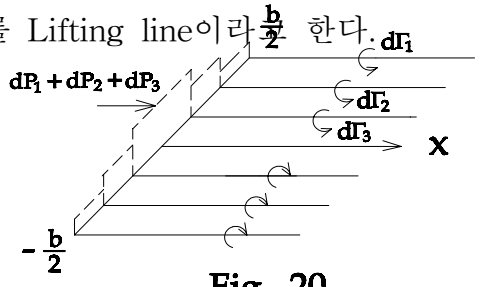


Fig. 20

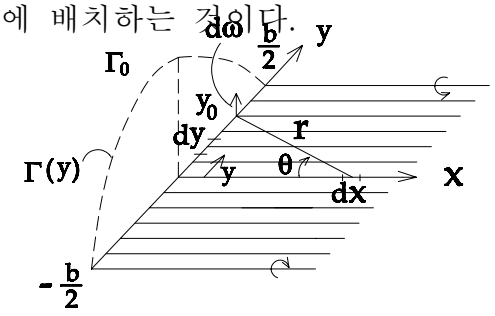


Fig. 21

즉 Fig. 20에서 y축이 Lifting line이 된다. 이제 무한히 많은 horseshoe vortex들을 y축 상에 분포시키면 Fig. 21과 같이 연속적으로 변하는 bound vortex를 얻는다.

y축 상에 임의위치 y에 있는 요소 dy에서 순환의 변화량은

$$d\Gamma = \left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy$$

이제 y에 위치한 반 무한 trailing vortex에 의해 y_0에 유기되는 속도 dw는

$$dw = -\frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{4\pi(y_0 - y)} \tag{4.13}$$

그러면 전체 trailing vortex에 의해 y_0 점에 유기되는 속도 w는

$$w(y_o) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{y_0 - y} \tag{4.14}$$

Fig. 15에서 y_0 위치의 wing 단면에서 유기앙각 $\Delta\alpha$는

$$\Delta\alpha(y_0) = \tan^{-1}\left(-\frac{w(y_0)}{\overline{U}}\right) \tag{4.15}$$

작은 유기앙각이라 가정하면

$$\Delta\alpha(y_0) = -\frac{w(y_0)}{\overline{U}} \tag{4.16}$$

(4.14)식을 (4.16)식에 대입하면

$$\Delta\alpha(y_0) = \frac{1}{4\pi\overline{U}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{y_0 - y} \tag{4.17}$$

$y = y_0$ 단면에서 양력계수는

$$\begin{aligned} C_L &= f_\alpha \cdot [\alpha_{eff.} - \alpha_{L=0}] \\ &= 2\pi[\alpha_{eff.} - \alpha_{L=0}] \end{aligned} \tag{4.18}$$

박익이론에 의해 양력계수 $f_\alpha = 2\pi$로 한다.

한편 Kutta-Joukowski 정리에 의해

$$L' = \frac{1}{2}\rho\overline{U}^2 c(y_0) C_L = \rho\overline{U}\Gamma(y_0) \tag{4.19}$$

이므로

$$C_L = \frac{2\Gamma(y_0)}{\overline{U}\,c(y_0)} \tag{4.20}$$

이를 (4.18)식에 대입하면

$$\alpha_{eff} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi\overline{U}\,c(y_0)} + \alpha_{L=0} \tag{4.21}$$

또한 $\alpha_{eff} = \alpha - \Delta\alpha$ 에서 $\alpha = \alpha_{eff} + \Delta\alpha$ 이므로

$$\therefore\ \alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi\overline{U}\,c(y_0)} + \alpha_{L=0} + \frac{1}{4\pi\overline{U}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{y_0 - y} \tag{4.18}$$

이 식이 Prandtl의 양력선 이론에 대한 기본식이다.

이 식은 Integro-differential Equation으로 미지수는 Γ뿐이다.

따라서 이 식을 풀면 $-\frac{b}{2}$ 에서 $\frac{b}{2}$ 사이의 순환의 분포 $\Gamma = \Gamma(y_0)$ 을 구할 수 있다. 이 $\Gamma(y_0)$ 을 알면 유한폭 wing에 대한 다음과 같은 값들을 구할 수 있다.

1. wing에서의 양력분포

$$L'(y_0) = \rho\overline{U}\Gamma(y_0) \tag{4.19}$$

2. 위 식을 span에 걸쳐 적분하면 총양력 L 을 구할 수 있다.

$$L = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} L'(y)\,dy = \rho\overline{U}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y)\,dy \tag{4.20}$$

따라서

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2 S} = \frac{2}{\overline{U}S}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y)\,dy \tag{4.21}$$

(S : Reference Area = wing의 경우 = platform area)

3. 단위 span 当의 Induced Drag는

$$D_i' = L_i' \sin\Delta\alpha \tag{4.22}$$

$\Delta\alpha$ 가 작으므로

$$D_i' = L_i' \cdot \Delta\alpha \tag{4.23}$$

따라서 wing 전체의 총 유도항력은

$$D_i = \rho \overline{U} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y)\Delta\alpha(y)dy \tag{4.24}$$

또

$$C_{D,i} = \frac{2}{\overline{U}S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y)\Delta\alpha(y)dy \tag{4.25}$$

여기서 $\Delta\alpha(y)$ 는 (4.17)식으로 구한다.

4.3 Elliptical Lift 분포

wing의 순환분포가

$$\Gamma(y) = \Gamma_0\sqrt{1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2} \tag{4.26}$$

과 같은 경우 y축 상에서 Lift 분포는 Fig. 21과 같은 elliptical이다.

이 경우 down wash는

$$w(y) = -\frac{\Gamma_0}{2b} \tag{4.27}$$

로 wing의 span 상에서 일정하다.(elliptical lift wing의 경우)

이 때 유도앙각은

$$\Delta\alpha = -\frac{w}{\overline{U}} = \frac{\Gamma_0}{2b\overline{U}} \tag{4.28}$$

즉 유도앙각 또한 span 상에서 일정하다.

또 양력 L 은

$$L = \rho \overline{U}\Gamma_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy \tag{4.29}$$

$$= \rho \overline{U}\Gamma_0 \cdot \frac{b}{4}\pi \tag{4.30}$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho \overline{U}^2 S} = \frac{b\pi}{2\overline{U}S}\Gamma_0 \tag{4.21}$$

따라서

$$\Delta\alpha = \frac{S}{b^2\pi} C_L = \frac{C_L}{\pi\Lambda} \tag{4.22}$$

(Λ : Aspect ratio)

또

$$C_{D,i} = \frac{{C_L}^2}{\pi\Lambda} \tag{4.23}$$

을 얻는다.

이 (4.23)식은 매우 중요한 의미를 갖는다. 즉 elliptical lift wing의 경우 유도항력계수는 양력계수의 제곱에 비례한다. 이는 당연한 일로, Induced drag은 앞서 설명했듯이, wing tip vortex의 결과로 발생하고, wing tip vortex는 tip의 상·하면의 압력차에 의해 발생하기 때문이다. 또한 Lift도 상·하면에서 압력차에 의한 것이므로 이들이 직접 비례하는 것은 너무 당연한 일이라 할 것이다.

분명 날개는 공짜로 양력을 발생시킬 수는 없다. 즉 wing의 유도항력을 극복하기 위해서 비행기 엔진에서 발생하는 power는 바로 양력을 얻는데 대한 보상인 것이다. 또한 C_{Di}는 C_L의 제곱에 비례하므로 C_L이 큰 경우, 즉 비행기가 낮은 속도로(이착륙과 같은 경우) 움직일 때 C_L의 값이 커지므로 C_{Di}값은 매우 커진다. 따라서 비행기의 총저항 중 유도항력은 매우 큰 몫을 차지한다. 심지어 매우 고속인 순항속도 비행에서도 유도항력은 전체 항력의 25%를 차지하는 것으로 알려져 있다.

또 하나 중요한 사실은 유도항력이 종횡비 Λ에 반비례한다는 것이다. 따라서 유도항력을 줄이려면 종횡비 Λ를 최대로 키워야 한다. 이는 구조 역학적으로 제한이 되고, 적정의 Λ를 선택하게 된다.

1903년 Wright Flyer는 $\Lambda = 6$이었고, 현대의 아음속 항공기는 $\Lambda = 6 \sim 8$이다.(예외로 U-2기는 $\Lambda = 14.3$임)

sailplane에서는 Λ=10~22 정도이다.

끝으로 elliptical lift 분포를 얻으려면 wing planform이 elliptical이라야 한다.

그 이유는 한 local section에서

$$C_l = 2\pi(\alpha_{eff} - \alpha_{L=0}) \tag{4.24}$$

이고,

따라서 단위 span 실 양력 $L'(y)$ 는

$$L'(y) = q_\infty c(y) \cdot c_l \tag{4.25}$$

따라서

$$c(y) = \frac{L'(y)}{q_\infty \cdot c_l} \tag{4.26}$$

(※ $q_\infty = \frac{1}{2}\rho \overline{\mathrm{U}}^2$: Freestream dynamic pressure)

이고 q_∞, c_l은 span 上에서 elliptical하게 변하므로 chord $c(y)$ 도 elliptical하게 변화하게 되는 것이다.

4.4 일반적 양력분포의 wing

이제 양력분포가 일반적으로 다음 식과 같은 Fourier sine 급수로 표시된다고 하자.

$$\Gamma(\theta) = 2b\overline{\mathrm{U}} \sum_{n=1}^{N} A_n \sin n\theta \tag{4.27}$$

여기서 A_n은 미지수이고 (4.27)식은 (4.18)식을 만족해야 한다.

그러면 최종적으로

$$C_L = A_1 \cdot \pi\Lambda \tag{4.28}$$

$$C_{D,i} = \frac{{C_L}^2}{\pi\Lambda}(1+\delta) \tag{4.29}$$

를 얻는다. 여기서

$$\delta = \sum_{2}^{N} n\left(\frac{A_n}{A_1}\right)^2$$

이제 span efficiency factor e를

$$e = (1+\delta)^{-1} \tag{4.30}$$

으로 정의하면 e는 1보다 큰 값이 되고,

$$C_{D,i} = \frac{{C_L}^2}{\pi e\Lambda} \tag{4.31}$$

이 된다. $\delta = 0$ 즉 $e = 1$ 이면 elliptical 양력분포가 되고 따라서 elliptical wing이 가장 유도항력이 작다는 것을 알 수 있다.

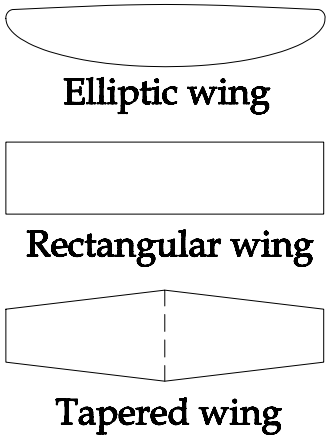


Fig. 22

그러나 Fig. 22에서 보듯이, elliptical wing은 제작이 매우 힘들어 4각형 wing이 만들어졌고 이 두 개를 절충한 Tapered wing이 보편화되었다.

5. Lifting Surface Theory(Vortex Lattice Method)

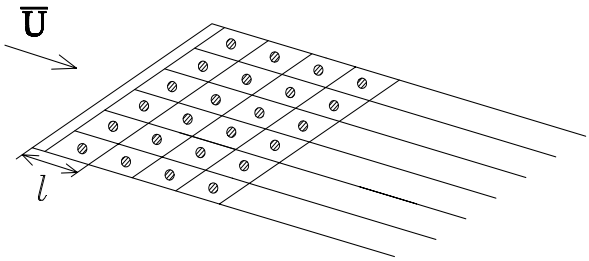


Fig. 23

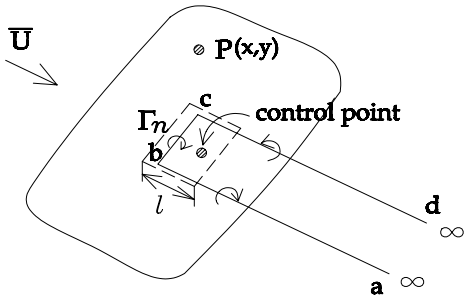


Fig. 24

Fig. 23 과 같이 wing 표면에 각각 다른 강도 Γ_n을 갖는 horse-shoe -vortex들을 분포시킨다.

Fig. 24 는 그 한 요소를 예시한 것으로 요소 bc가 panel의 앞부분에서 $\frac{l}{4}$ 되는 곳에 오게 배치한다. Control point(wing 경계조건을 적용하는 위치)는 panel의 앞부분에서 $\frac{3}{4}l$되는 곳에 잡는다. 그러면 wing 上의 임의의 점 $P(x, y)$에서 이 한 horseshoe vortex에 의해 유기되는 속도는 Vortex Filament ab, bc, cd를 따로따로 Biot-Savart 법칙에 의해 구할 수 있다.

결국 wing 표면 전체를 n개의 vortex panel로 만들 수 있고, 각 vortex 강도 Γ_n을 미지수로 하여, 경계조건(법선속도=0)을 적용하면 control point 들에 관한 연립 방정식을 풀 수 있게 된다. 그 결과 Γ_n이 구해진다.

이를 Vortex Lattice Method라 한다.