

## 10장. 제어계의 주파수 영역 해석

제어계의 성능 - 시간영역 응답특성으로 파악하는 것이 실질적이고 직접적이다.

주파수 영역특성 - 선형 제어계의 해석과 설계에 적합한 도식적 방법이 풍부.

결과적으로 주파수 영역의 연구로부터, 시간 영역의 성능을 계획할 수 있다.

선형계에서,  $r(t)$ 를 진폭  $R$ 과 주파수  $\omega_0$ 인 正弦波라 하면

$$r(t) = R \sin \omega_0 t$$

이때, 정상상태 출력

$$C(t) = C \sin (\omega_0 t + \phi)$$

플의 正弦波가 된다. (  $C$  ; 진폭,  $\phi$  ; 위상 )

이때

$$C(s) = G(s)R(s)$$

이고  $s$ 를  $j\omega$ 로 대치하면

$$C(j\omega) = G(j\omega)R(j\omega)$$

한편 함수  $C(j\omega)$ 를

$$C(j\omega) = |C(j\omega)| \angle C(j\omega)$$

와 같이 표시하면

$$|C(j\omega)| = |G(j\omega)| |R(j\omega)|$$

이고,

위상도

$$\angle C(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle R(j\omega)$$

가 된다.

즉, 진폭  $C$ 는

$$C = |R| |G(j\omega)|,$$

위상은

$$\phi = \angle G(j\omega)$$

즉,  $G(s)$ 를 알고 있으면, 正弦波 입력에 대한 진폭특성

$|G(j\omega)|$ 와 위상특성  $\angle G(j\omega)$ 를 가지고 정상상태 출력을 완전히 파악할 수 있게 된다.

○ 폐루프계의 주파수 응답

단일 폐루프계의 폐루프 전달함수

$$\therefore M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

正弦波 정상상태의 경우

$$s = j\omega : M(j\omega) = |G(j\omega)| \angle M(j\omega)$$

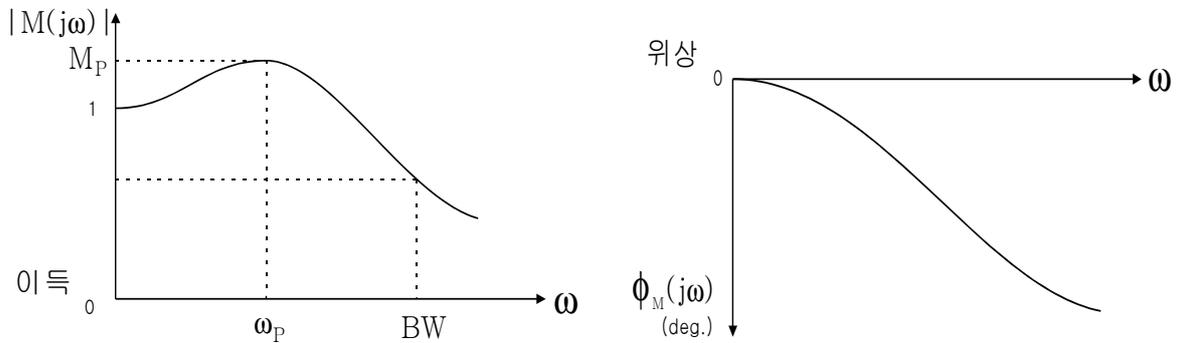
또는

$$M(j\omega) = \text{Re} [M(j\omega)] + j\text{Im} [M(j\omega)]$$

$$\begin{aligned} \therefore |M(j\omega)| &= \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \right| \\ &= \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)H(j\omega)|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle M(j\omega) &= \phi M(j\omega) \\ &= \angle G(j\omega) - \angle [1 + G(j\omega)H(j\omega)] \end{aligned}$$

\* 궤환제어계의 전형적인 이득 - 위상 특성



- $M_p$  : 尖頭 공진 値 -  $M_p$ 의 크기는 궤환제어계의 상대적 안정의 한 척도가 됨. 즉  $M_p$ 가 크면 시간 영역에서 계단 응답의 큰 overshoot가 대응된다.  
- 일반적으로 적정인  $M_p$ 는 1.1~1.5 사이의 값이다.

- $\omega_p$  : 공진 주파수

- BW : Bandwidth. 帶域幅.  $|M(j\omega)|$ 의 크기가 주파수 0 일때 값의 70.7% 또는 3dB 떨어질 때의 주파수로 정의

$$\begin{aligned} \text{cf) } \text{dB} &= 20 \log \frac{M}{M_0} = 20 \log \frac{70.7}{100} \\ &= -3.0 \text{ dB} \quad (3\text{dB 감소}) \end{aligned}$$

- 일반적으로 큰 BW가 더 빠른 상승시간에 대응하고, 더 높은 주파수가 쉽게 출력으로 통과하므로 과도응답 특성에 관계된다. 역으로 BW가 작으면 저주파수만 통과하고, 일반적으로 시간응답은 늦고 굵뜨게 된다.

10.2. 전형적 2차계의  $M_p$ ,  $\omega_p$ , BW.

다음 페루프 전달함수를 생각하자.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

정현파 정상상태 전달함수는  $s = j\omega$ 로 하여 얻는다.

$$\begin{aligned} M(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{1 + j2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\zeta - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{aligned}$$

간단히  $\xi = \frac{\omega}{\omega_n}$  라 두면

$$M(j\xi) = \frac{1}{1 + j2\zeta\xi - \xi^2}$$

$$|M(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + 4\zeta^2\xi^2}}$$

$$\angle M(j\omega) = \phi_M(\xi) = 1 - \tan^{-1} \frac{2\zeta\xi}{1 - \xi^2}$$

$|M(j\omega)|$  를  $\xi$ 에 관해 미분하고 0으로 놓으면 공진 주파수를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d|M(j\xi)|}{d\xi} &= \frac{1}{2} [(1 - \xi^2)^2 + (2\zeta\xi)^2]^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \cdot (4\xi^3 - 4\xi + 8\xi\zeta^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 4\xi^2 - 4\xi + 8\zeta^2\xi = 0$$

근을 구하면

$$\xi_p = \sqrt{1 - 2\zeta^2} = \frac{\omega_p}{\omega_n}$$

$$\therefore \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

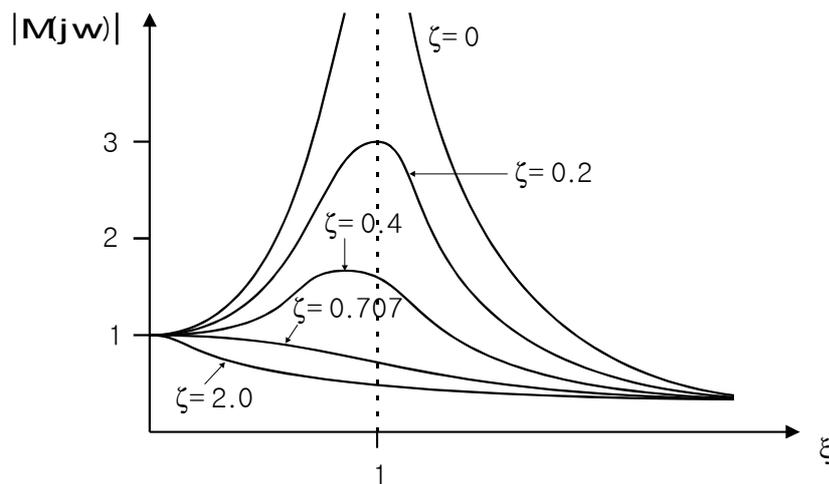
주파수는 실수 값이므로 위 식은  $1 - 2\zeta^2 > 0$

(즉  $\zeta < 0.707$ ) 일 때만 유용하다.

즉  $\zeta > 0.707$  일 때는 항상  $\omega_p = 0$  이고,  $M_p = 1$  임을 뜻한다.

$\omega_p$  를 이용하여  $M_p$  를 구하면

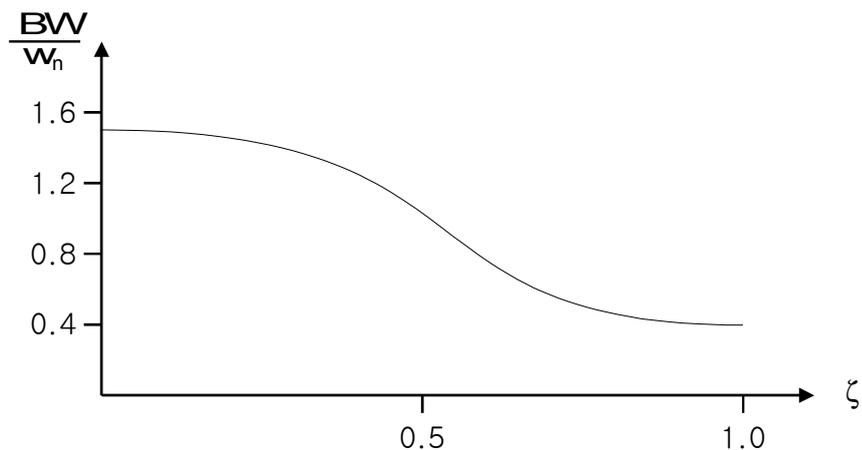
$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\zeta < 0.707)$$



대역폭 (BW)

2차계의 경우

$$BW = \omega_n \left[ (1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{\frac{1}{2}}$$



< 요약 >

1. 시간영역에서 단위계단응답의 최대 오버슈트는  $\zeta$ 에만 의존한다.
2.  $M_p$ 는  $\zeta$ 에만 의존한다.
3. 계단응답의 상승시간은  $\zeta$ 에 따라 증가한다.
4. 대역폭은  $\omega_n$ 에 비례한다.
5. 더 넓은 대역폭은 더 큰  $M_p$ 에 대응한다.

## 10.5. Nyquist 안정 판별법

; 준 도식적 방법으로, 루프전달함수  $G(s)H(s)$ 의 주파수 영역 도면의 성질을 검토하여 폐루프계의 안정성을 판별한다.

- Nyquist 판별법은 S평면 좌반 ( 또는 우반 )에서 특성근의 위치를 결정하나, 근계적법과는 달리 특성근의 정확한 위치는 제공치 않는다.

단일 폐루프계 전달함수

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

에서

$$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

이 특성방정식이다.

이 근은  $1+G(s)H(s)$ 의 0점으로부터 구할 수 있다.

이제  $F(s) = G(s)H(s)$ 라 두면

$$\Delta(s) = 1 + F(s) = 0$$

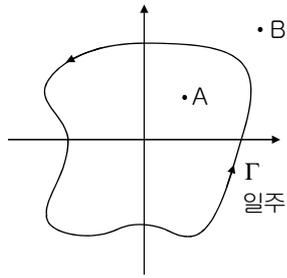
### 1. 극점과 영점의 동등성

- 루프전달함수의 영점 =  $F(s)$ 의 영점
- " " 극점 =  $F(s)$ 의 극점
- 폐루프 전달함수의 극점 =  $1+F(s)$ 의 영점  
= 특성방정식의 근
- $1+ F(s)$ 의 극점 =  $F(s)$  즉 루프전달함수의 극점.

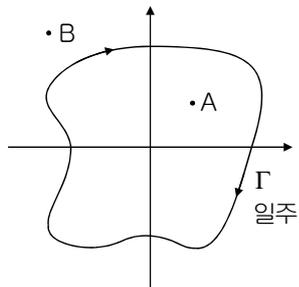
### 2. 안정조건

- 개루프 안정성 : 루프전달함수  $G(s)H(s)$ 의 극점들이 모두 s 좌반평면에 있을 것
- 폐루프 안정성 :  $1+F(s)$ 의 영점들이 모두 s 좌반 평면에 있을 것.

\* 일주 ( encircled )와 포함 ( enclosed )

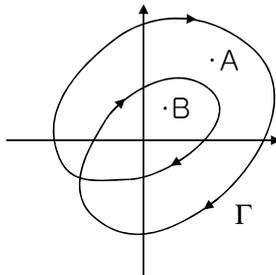


A : 포함 , B : 포함 안됨



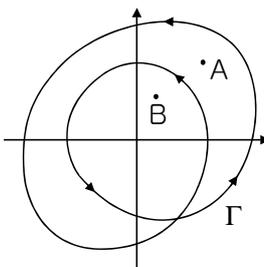
A : 포함 안됨 , B : 포함

포함 횟수



A : 한번 포함 (편각  $2\pi$ ) ,

B : 두번 포함 (편각  $4\pi$ )



A : 한번 포함 ,

B : 두 번 포함

\* 편각의 원리

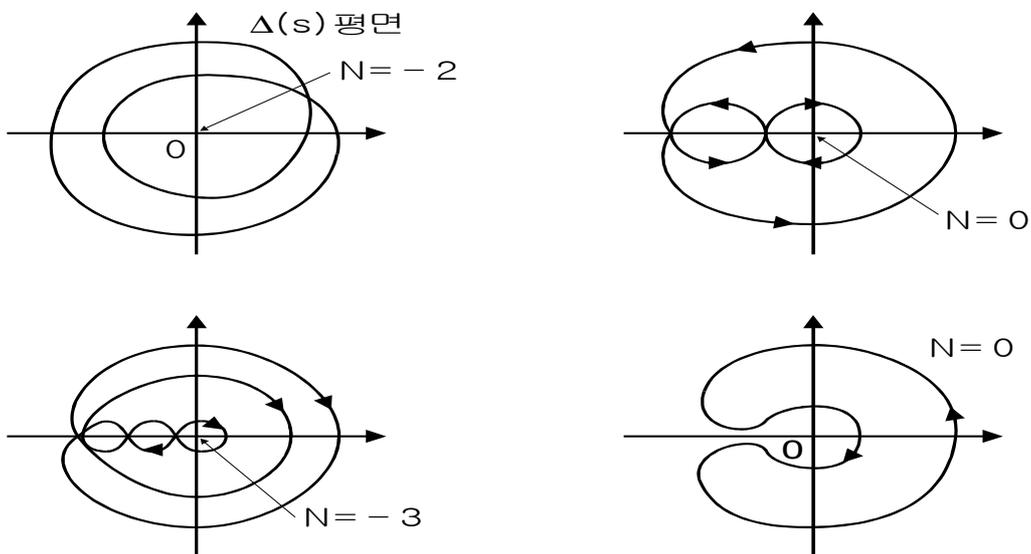
$\Delta(s)$ 를  $s$ 평면 위에 유한개의 극점을 갖는 단가함수라 하자.  
 $s$ 평면 위에 임의의 폐경로  $\Gamma(s)$ 를 선정하여 이 경로가  
 $\Delta(s)$ 평면에 사상되는  $\Gamma_{\Delta}$  궤적은,  $s$ 평면의 궤적  $\Gamma(s)$ 에  
 의해 일주된  $\Delta(s)$ 의 영점수와 극점수의 차가 같은 횟수로  
 원점을 일주할 것이다.

즉,  $N = Z - P$

$N$  :  $\Delta(s)$  평면의 궤적  $\Gamma_{\Delta}$ 가 원점을 일주한 횟수

$Z$  :  $s$ 평면에서  $\Gamma_{\Delta}$ 가  $\Delta(s)$ 의 영점을 일주한 횟수

$P$  :  $s$ 평면에서  $\Gamma_{\Delta}$ 가  $\Delta(s)$ 의 극점을 일주한 횟수



< N을 결정하는 例 >

\* Nyquist 經路

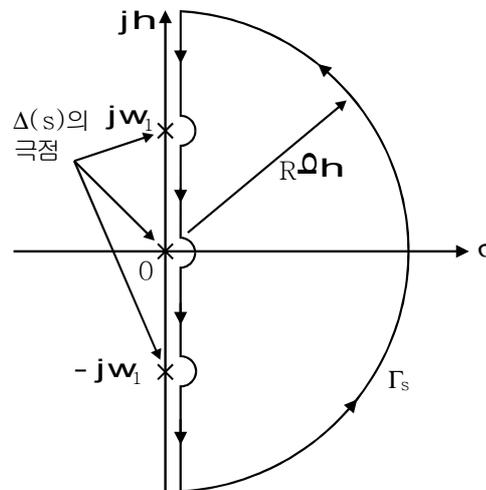
폐루프계

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

의 안정도 문제, 즉 함수가

$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + F(s) = 0$ ,  
 $s$ 평면 우반부에 영점을 갖고 있는가 하는 문제를 Nyquist  
 는 복소 함수론의 편각의 원리를 적용하여  $s$ 평면 폐적  
 $\Gamma_s$ 를  $s$ 평면 우반면 전체를 일주하도록 하여 해결하는  
 방법을 발견하였다.

( 물론, 방법을 달리해서  $\Gamma_s$ 를  $s$ 평면 좌반면 전체를  
 일주하도록 해서 해결할 수도 있다.)



그림과 같이 반 시계 방향의 한계적  $\Gamma_s$ 를  $s$ 의 우반면을  
 일주하도록 잡을 수 있다. 이 Nyquist 경로는  $\Delta(s)$ 의  
 어떤 극점이나 영점도 지나지 않아야 하므로 그림과 같은  
 모양을 한다.

만일  $\Delta(s)$ 의 극점이나 영점이  $s$ 평면 우반부에 있다면  
 Nyquist 경로가 이들을 일주할 것이다.

\* Nyquist 선도와 Nyquist 판별법

$\Gamma_s$ 에 대응하는  $\Delta(s)$ 의 궤적을 Nyquist 선도라 한다.  
그러나 일반적으로  $F(s)$ 에 대한 Nyquist 선도를 작성하는 것이 편리하고, 안정도 판정에 있어서도,  $F(s)$ 선도로부터 점  $(-1, 0j)$  주위에 대한 회전수를 가지고 평가를 하면 된다.  
즉 Nyquist 안정 판별법이란, 폐루프계의 성질을 '개루프 전달함수'를 이용하여 평가할 수 있는 특징을 보여준다.

$N_0$  :  $F(s)$ 에 의해 원점을 일주한 횟수

$N_{-1}$  :  $F(s)$ 에 의해  $(-1, 0j)$ 을 일주한 횟수

$Z_0$  :  $\Gamma_s$ 가 일주한  $1+F(s)$ 의 영점수  
( 또는  $s$ 평면 우반의  $F(s)$  영점수 )

$Z_{-1}$  :  $\Gamma_s$ 가 일주한  $1+F(s)$ 의 영점수  
( 또는  $s$ 평면 우반의  $1+F(s)$  영점수 )

$P_0$  :  $\Gamma_s$ 가 일주한  $F(s)$ 의 극점수  
( 또는  $s$ 우반에 있는  $F(s)$  극점수 )

$P_{-1}$  :  $\Gamma_s$ 가 일주한  $1+F(s)$ 의 극점수  
( 또는  $s$ 우반에 있는  $1+F(s)$ 의 극점수 ) 라 할 때

$P_0 = P_{-1}$ 로  $F(s)$ 는  $1+F(s)$ 와 항상 동일한 극점을 갖는다.

또 폐루프 안정은  $Z_{-1} = 0$ 을 요구하고 개루프 안정은

$$P_0 = 0$$

을 요구한다.

\* Nyquist 안정 판별법

1.  $\Gamma_s$ 를 정의한다.
2.  $F(s)$ 의 Nyquist 선도를 그린다.
3.  $N_0, N_{-1}$ 을 원점과  $(-1, 0j)$ 점에 대한  $F(s)$  Nyquist 선도로부터 결정한다.
4.  $N_0, N_{-1}$ 이 구해지면  $P_0$ 를 구한다.  
식은  $N_0 = Z_0 - P_0$   
( 단, 여기서  $Z_0$ 는 알고 있는 값임.)

5.  $P_0$ 가 구해지면

$$P_{-1} = P_0$$

이고,

$$N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1} = Z_{-1} - P_0$$

에서  $Z_{-1}$ 을 구한다.

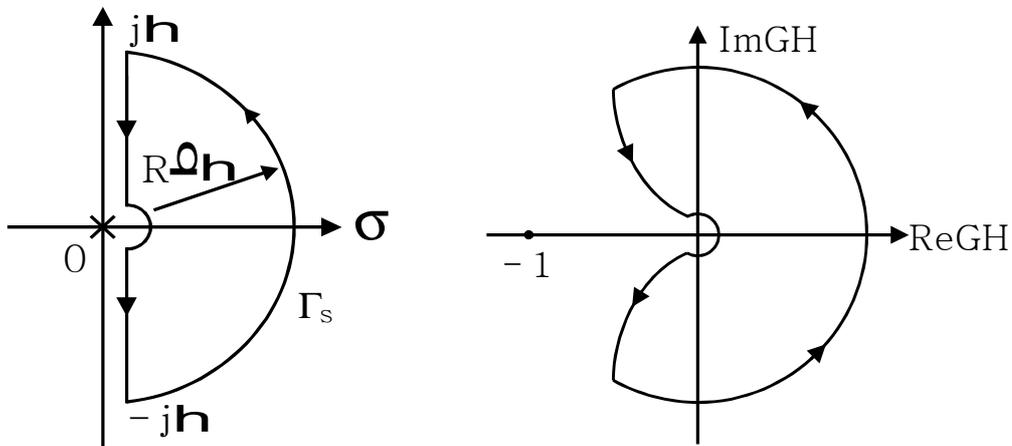
6. 안정한 폐루프계 에서는  $Z_{-1} = 0$  이라야 하므로,  
이를 적용한다.

(ex) Nyquist 판별법 적용 예

루프전달함수  $F(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)}$

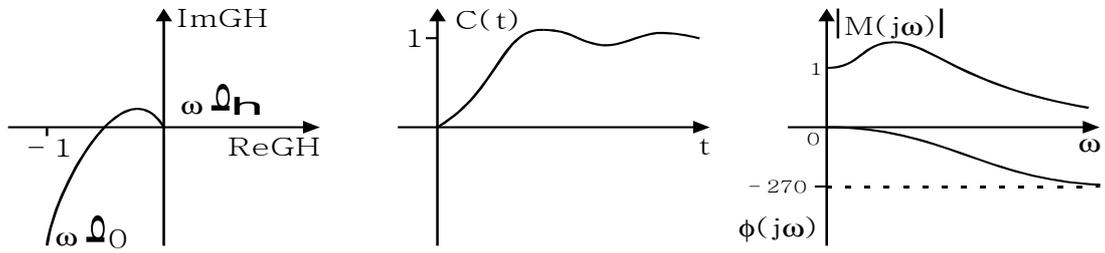
( 단  $K, a$ 는 양의 실수 )를 갖는 단일 루프폐환 제어계를 생각하자.

먼저  $\Gamma_s$  는  $F(s)$ 의 선도

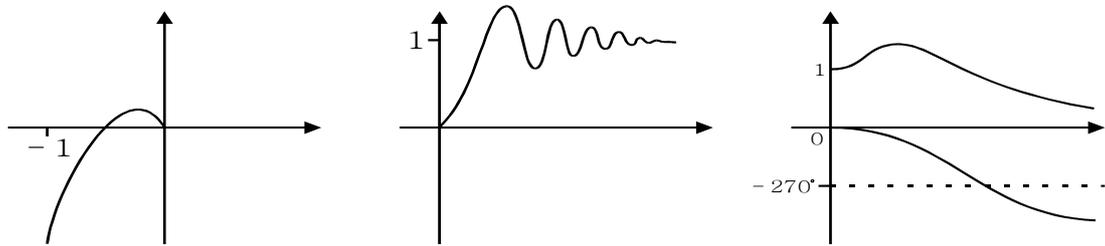


1. 우선  $P_{-1} = 0$  임을 알 수 있다.
2.  $F(s)$ 선도에서  $N_{-1} = 0$  임을 알 수 있다.
3. 따라서  $N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1}$ 에서  $Z_{-1} = 0$  임을 알 수 있다.
4. 따라서  $1 + G(s)H(s)$ 가 우반  $s$ 면에 영점을 갖지 않으므로, 이 계는 안정이다.

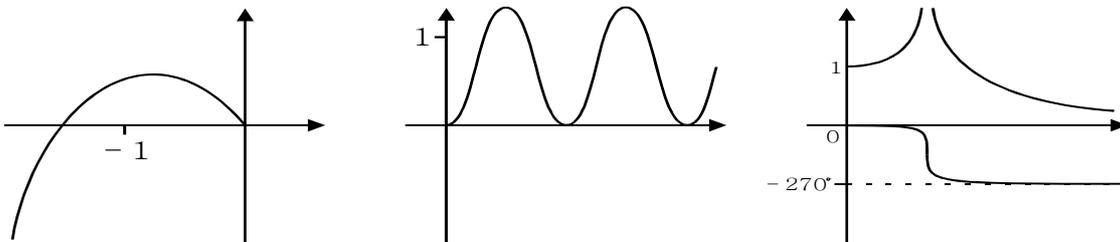
10.11. 상대안정도 : 이득여유와 위상여유



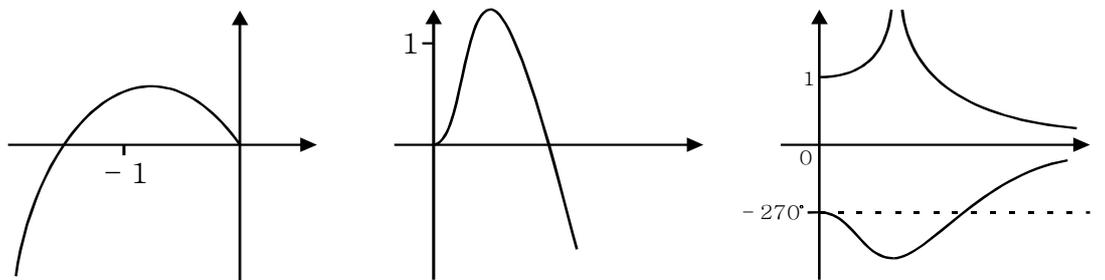
< 안정, 적정 감쇠계 >



< 안정, 진동하는 계 >



< 임계 불안정계 >

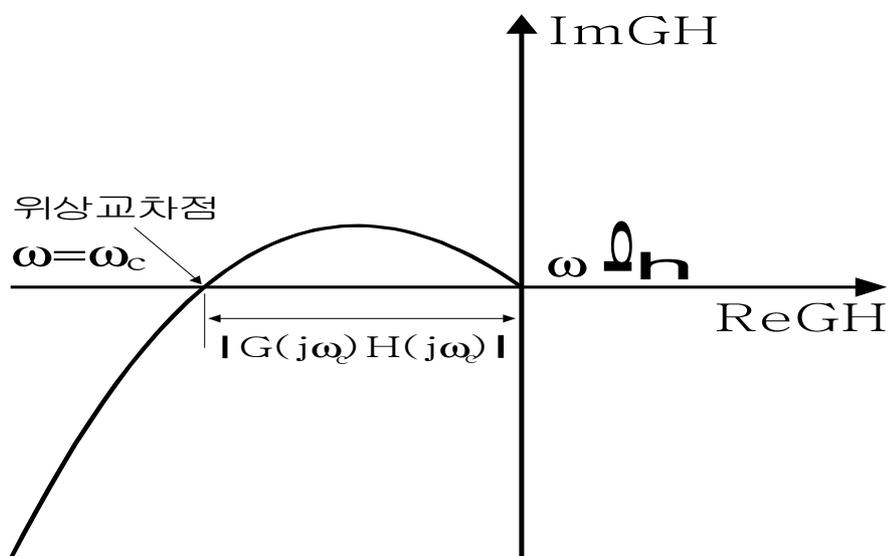


< 불안정 계 >

위상 교차점 :  $G(j\omega)$ 평면에서 GH의 Nyquist 선도가 음의 실축을 자르는 점이다.

위상 교차 주파수 : (phase - crossover freq.)

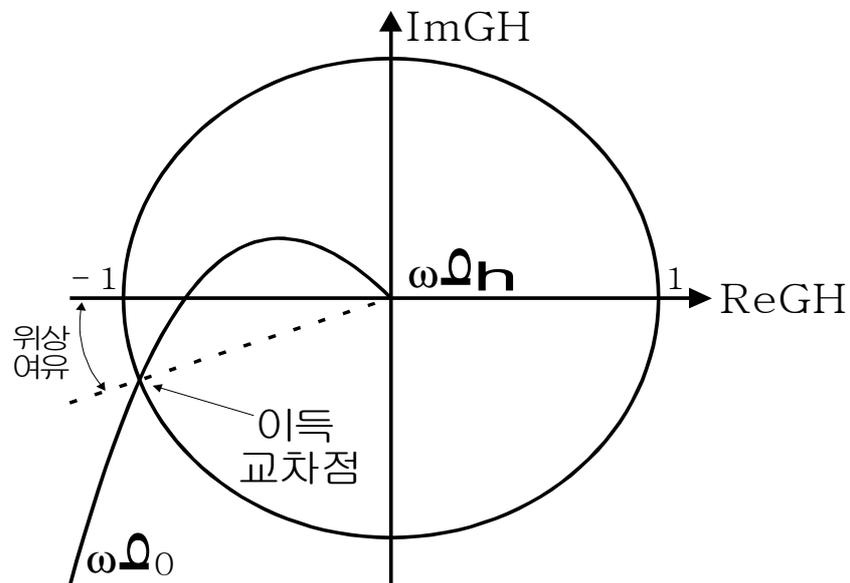
$\omega_c$  = 위상 교차점에서 주파수.



이득여유 ( gain margin )

$$G.M. = 20 \log \frac{1}{|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|} \text{ (dB)}$$

\* 이득 교차점



이득 교차점 :  $G(j\omega)H(j\omega)$ 의 크기가 1이 되는  
 $G(j\omega)H(j\omega)$  위의 점

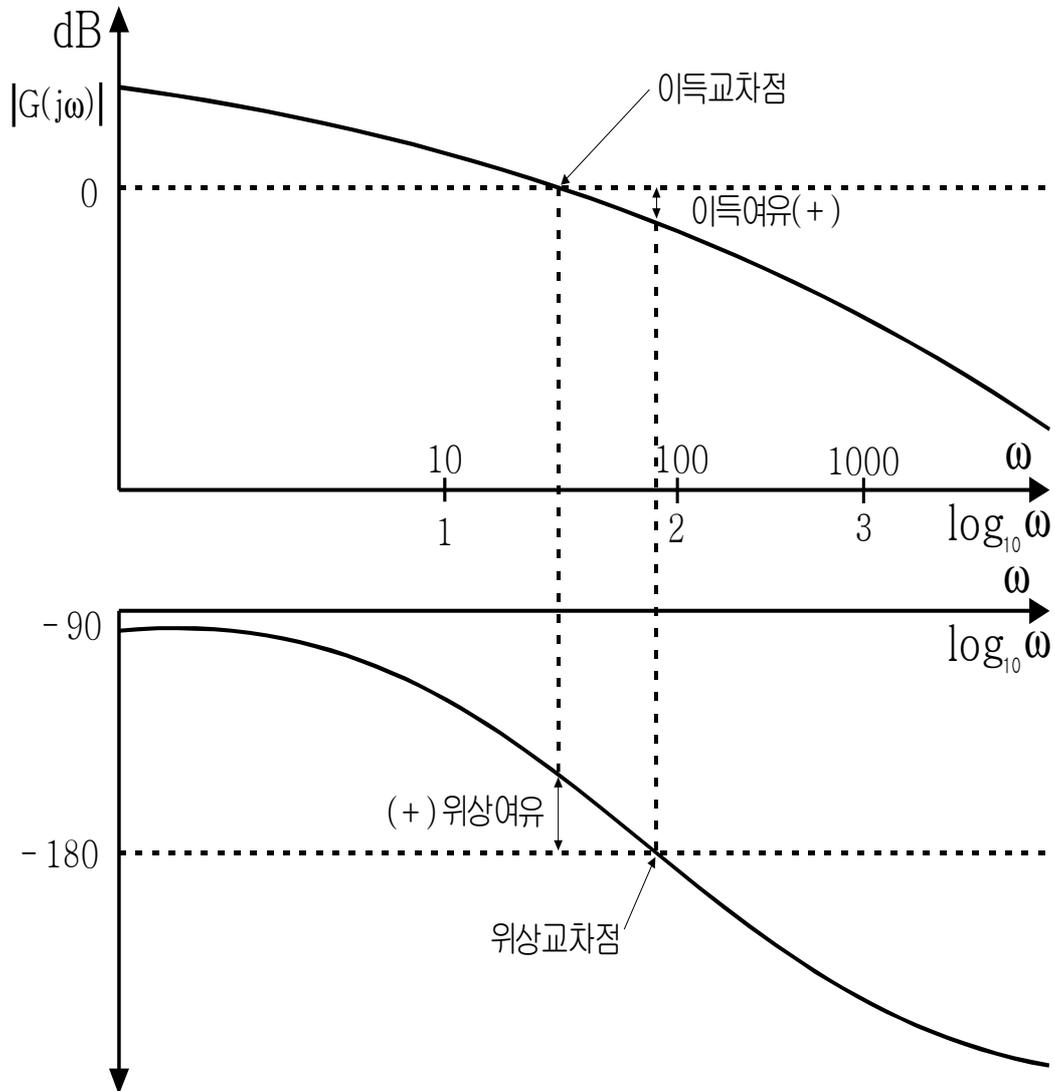
이득 교차점 주파수 ( $\omega_g$ ) 이득 교차점에서의 주파수.

위상여유 ( phase Margin )

$$\underline{\Phi.M. = \angle G(j\omega_g) H(j\omega_g) - 180^\circ}$$

계가 불안정일 경우, 위상 여유는 음수가 된다.

## 10.12. Bode 선도를 이용한 안정도 해석



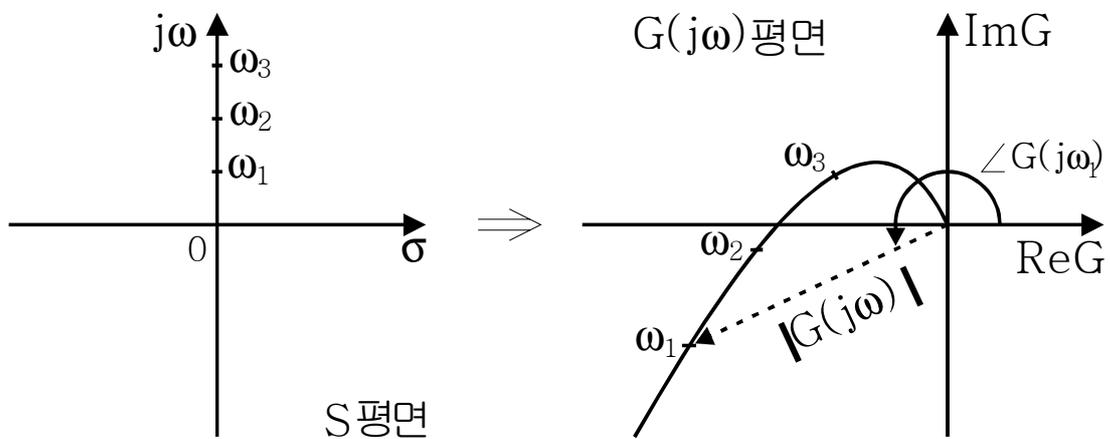
이득여유가 + 이면, 계가 안정이다.  
 위상여유도 + 이면, 계가 안정이다.

\* 주파수 영역 圖面

$G_s$ 를 폐환 제어계의 개루프 전달함수라 하자. 폐루프계의 주파수 영역 해석은  $G_s$ 에서  $s$ 대신  $j\omega$ 로 대치한 주파수 영역도 면에서 구할 수 있다.

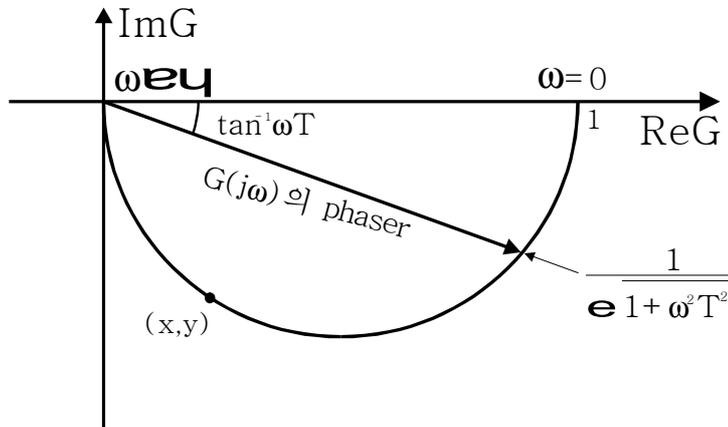
$$G(j\omega) = \underbrace{|G(j\omega)|}_{\text{크기}} \angle \underbrace{G(j\omega)}_{\text{위상}}$$

1. 극좌표 도면 :  $\omega$ 를 0에서  $\infty$ 로 변화시킬 때,  
극좌표계에서 위상과 크기의 도면



< 극 좌표 도면 >

(ex)  $G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$  의 극좌표 도면



Phaser : 크기와 위상을 갖는 vector.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + T\omega j} = \frac{1 - T\omega j}{1 + T^2\omega^2}$$

$$= \frac{1}{1 + T^2\omega^2} - \frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2} j$$

$$\therefore \text{크기}^2 = \left( \frac{1}{1 + T^2\omega^2} \right)^2 + \left( \frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2} \right)^2$$

$$\therefore |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

$$\text{위상} = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2}}{\frac{1}{1 + T^2\omega^2}} = \tan^{-1} \omega T$$

극좌표 도면상의 임의 점을 ( x, y )라 하면

$$x = \frac{1}{1 + T^2\omega^2} \quad y = -\frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

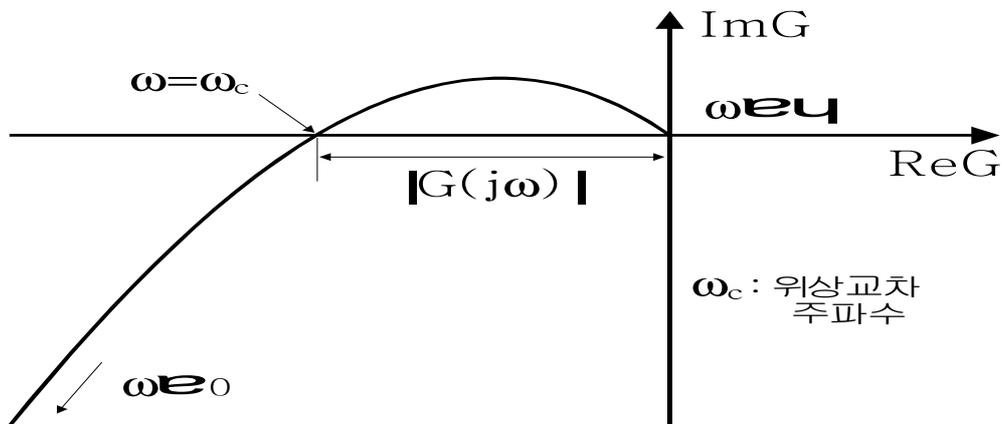
$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{1}{1 + T^2\omega^2}$$

즉 반경  $\frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$  인 원호를 그림.

Nyquist 안정판별에 있어서, 정확한 주파수 응답 도면이 필수적은 아니다.

즉, 간이 적으로, 전달함수  $G(j\omega)$ 의 극 좌표도면을 그려서, 이로부터 주파수영역의 안정성을 충분히 해석할 수 있다. 이때 얻는 정보로는

1.  $\omega=0$ ,  $\omega=\infty$  때  $G(j\omega)$ 의 크기와 위상
2. 극좌표 도면과 실수축과 허수축과 만나는 점과 이때  $\omega$ .



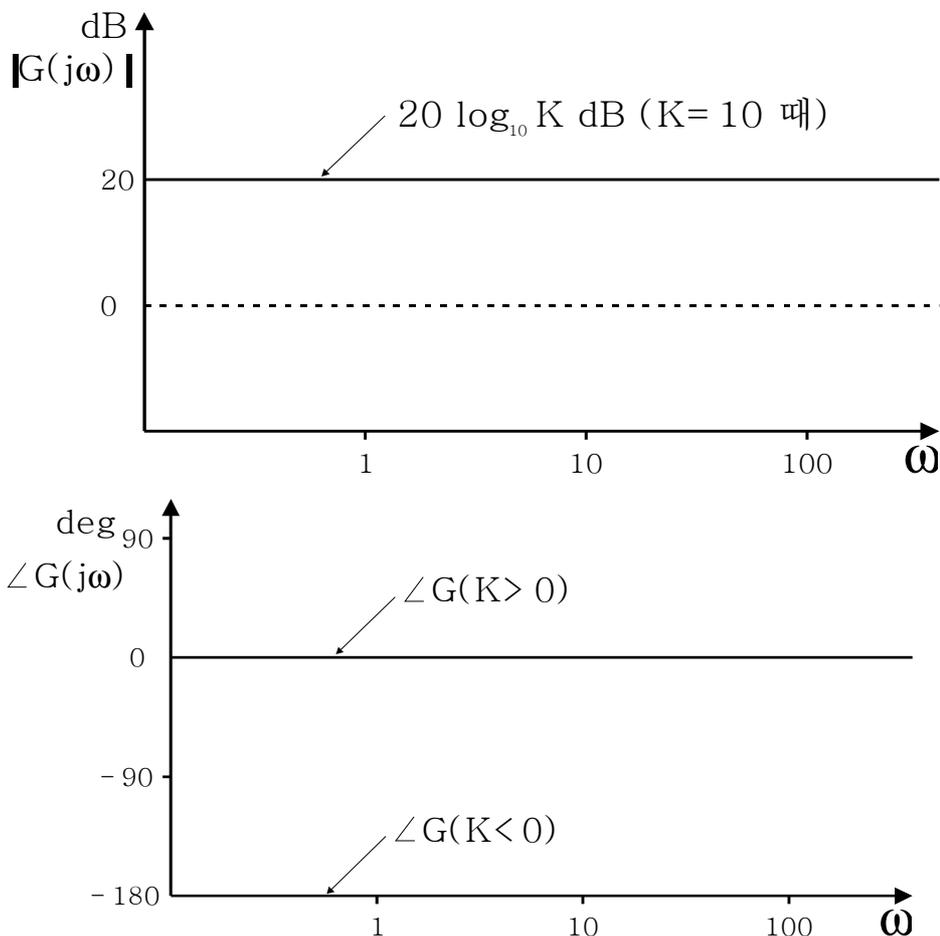
\* Bode 선도

$G(j\omega)$ 의 Bode 선도는  $G(j\omega)$ 의 크기를  $\log_{10}\omega$ 를 base로 dB 값으로 나타내고, 또  $G(j\omega)$ 의 위상을 역시  $\log_{10}\omega$ 를 base로 나타낸 것이다.

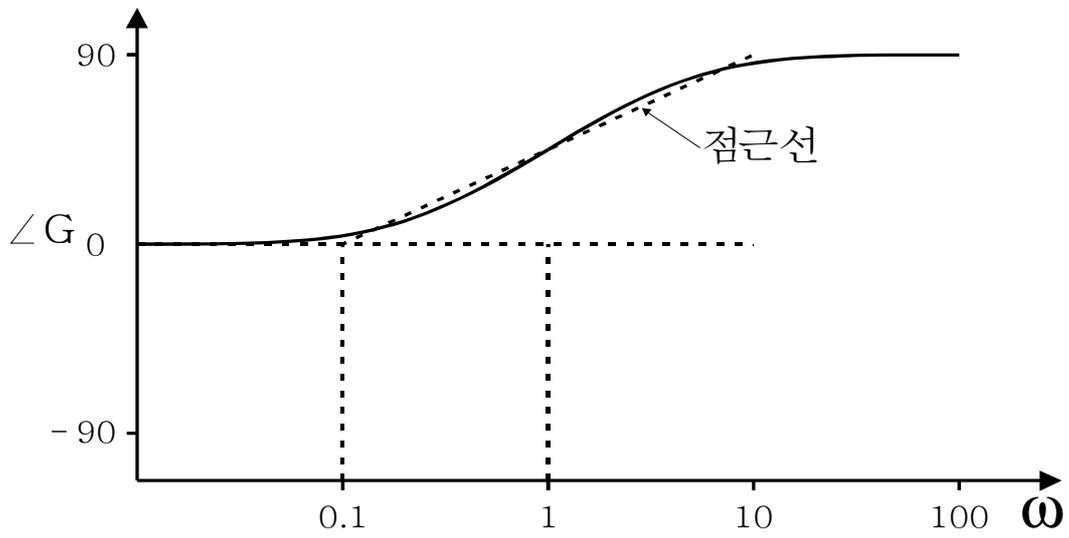
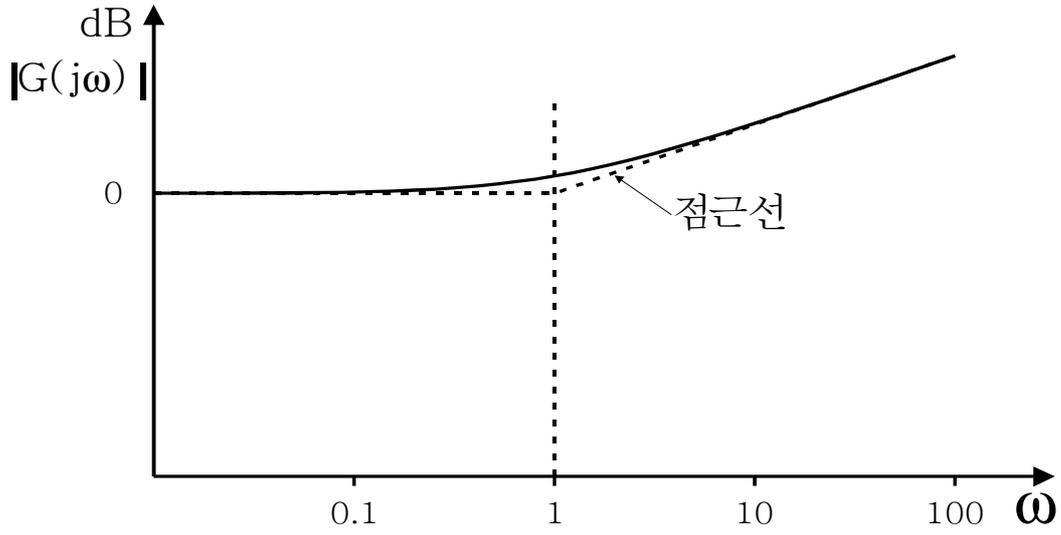
\* Bode 선도의 특징은

1. Bode 선도에서는  $G(j\omega)$ 의 크기가 dB로 표현되고,  $G(j\omega)$ 의 곱과 나누기는 합과 차로 된다. 위상도 역시 합과 차가 된다.
2.  $G(j\omega)$ 의 Bode 선도 (크기)는 직선에 의한 근사가 가능하고 이를 이용 근사적 Bode 선도를 그릴 수 있다.

A.  $G(s) = K$  때 Bode 선도

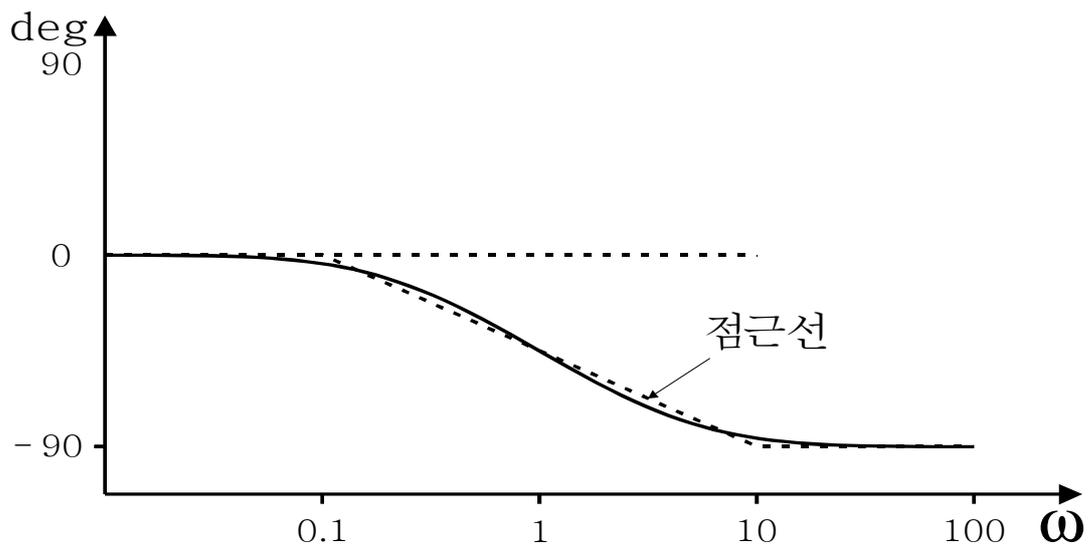
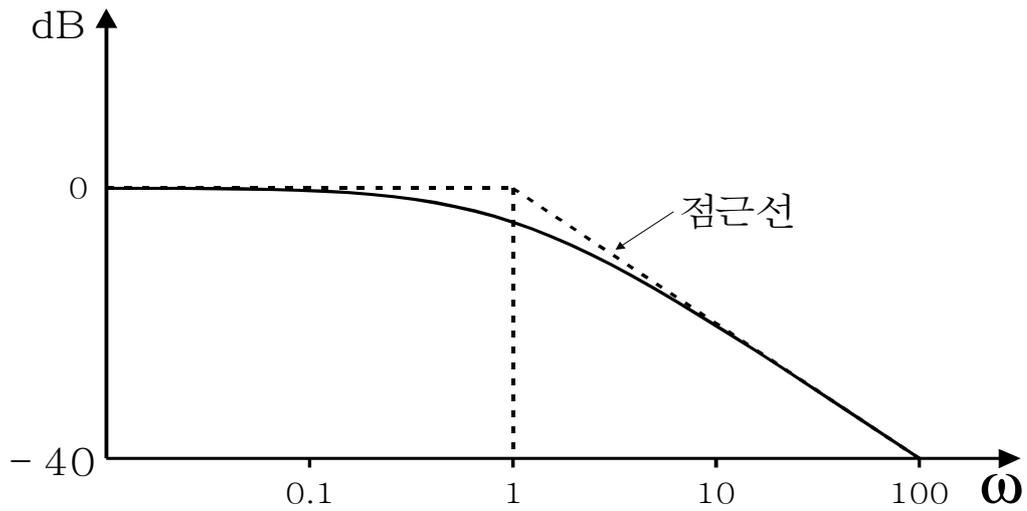


B. 단순 영점  $G(j\omega) = (1 + j\omega T)$



C. 단순극점

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$



D. 2차계  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

