8장. 根軌跡 (Root Locus) 기법

선형계통에서, 임의의 Parmeter가 변할 때 특성방정식의 根軌跡을 조사하여 계의 특성을 파악한다.

특성방정식을 F(s) = 0라 하면

$$F(s) = P(s) + KQ(s) = 0$$

여기서 P는 s의 n차 다항식, Q는 s의 m차 다항식이다

또, K는 實定數로 $-\infty$에서 ∞까지 변화한다.

K의 값에 따라

1. 근궤적 (RL ; Root Locus)
   ⇒ $0 \le K < \infty$ 인 경우의 근궤적

2. 對應 근궤적 (CRL ; Counter Root Locus)
   ⇒ $-\infty < K \le 0$ 인 경우의 근궤적

3. 근 카운터 (RC ; Root Counter)
   ⇒ 한 개 이상의 파라메터가 변할 때 근궤적

4. 완전 근궤적
   ⇒ $-\infty < K < \infty$ 에서의 근궤적

8.2. 근궤적의 기본 성질

폐루프계의 전달함수

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

특성방정식 : 1 + G(s)H(s) = 0 → A

여기서 G(s)H(s)가 K를 가진다고 하자

$$G(s)H(s) = \frac{KQ(s)}{P(s)}$$

그러면 특성방정식은

$$1+\frac{KQ(s)}{P(s)} = \frac{P(s)+KQ(s)}{P(s)} = 0$$

$$\therefore \underline{P(s)+KQ(s)=0}$$

만일 $G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s)$로 표기하면, A에 대입하여

$$G_1(s)H_1(s) = -1/K$$

이 방정식이 만족되기 위해서 다음 조건들이 동시에 성립하여야 한다.

① 크기 조건 : $|G_1(s)H_1(s)| = 1/|K|$ ($-\infty <$ K $< \infty$)

② 각도 조건 : $\angle G_1(s)H_1(s) = (2k+1)$ (k≥0)

($=\pi$의 홀수배)

$\angle G_1(s)H_1(s) = 2k\pi$ (k≤0)

($=\pi$의 우수배)

만일 $G(s)H(s)$가 m개의 0점과 n개의 극점을 가지면

$$G(s)H(s) = K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p2)\ldots(s+p_n)}$$

이고

$$\left|G_1(s)\,H_1(s)\right| = \frac{\prod_{i=1}^{m}\left|S+Z_i\right|}{\prod_{j=1}^{n}\left|S+P_j\right|} = \frac{1}{|k|} \qquad (-\infty < k < \infty)$$

$$\angle G_1(s)H_1(s) = \sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{m}\angle(s+p_j)$$
$$= (2k+1)\pi \qquad (\ 0 \le K \le \infty\ )$$

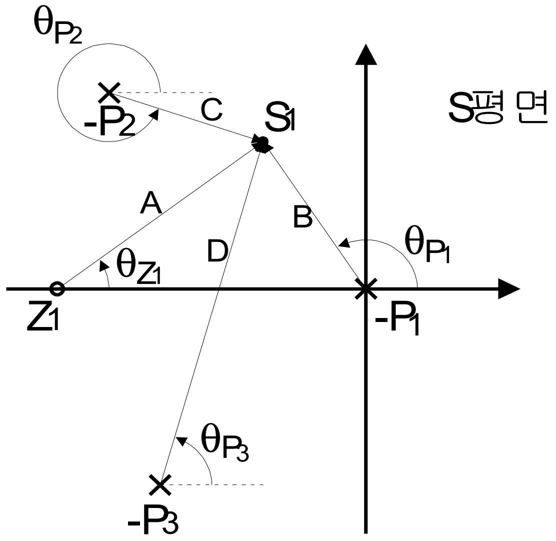
$$\angle G_1(s)H_1(s) = \sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{m}\angle(s+p_j)$$
$$= 2k\pi \qquad (\ -\infty < K \le 0\ )$$

또는

$$|k| = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left|S+P_j\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|S+Z_i\right|}$$

($\prod_{j=1}^{n}$: 각 요소의 곱을 의미)

(ex) $G_1(s)H_1(s) = \dfrac{K(s+z_1)}{s(s+p_2)(s+p_3)}$ 이라면,



s평면내 임의의 점 s_1을 선정하여 G(s)H(s)의 극과 영점에서 s_1으로 vector를 그린다. 그러면

① $\angle(s_1 + z_1) - \ s_1 - \ \angle(s_1 + p_2) - \ \angle(s_1 + p_3)$

$= \theta z_1 - \ \theta p_1 - \ \theta p_2 - \ \theta p_3 = \ (2k+1)\pi$

(s_1이 RL 上에 있을 때)

$= 2k\pi$ (s_1이 CRL 上에 있을 때)

② $|K| = \dfrac{|s_1||s_1 + p_2||s_1 + p_3|}{|s_1 + z_1|} = \dfrac{BCD}{A}$

에 의해 근궤적상의 점 s_1에서 k의 크기를 구할 수 있다.

③ 최근에는 디지털 컴퓨터를 이용 효과적으로 근궤적을 간단히 그릴 수 있게되었다.

8.3. 완전 근궤적의 작도

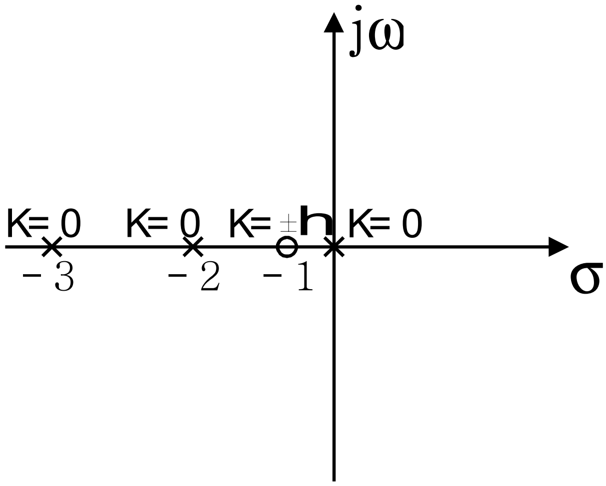
① K = 0 인 점 : 완전 근궤적 上의 K = 0 인 점은 G(s)h(S)의 극점이다.

$$|G_1(s)H_1(s)| = 1 / |K|$$

② K = ±∞ 인 점 : 완전 근궤적 上의 K= ±∞ 인 점은 G(s)H(s)의 영점이다.

(ex) $S(S+2)(S+3)+K(S+1)=0$

$$1+G(s)H(s) = 1+ \frac{K(S+1)}{S(S+2)(S+3)} = 0$$

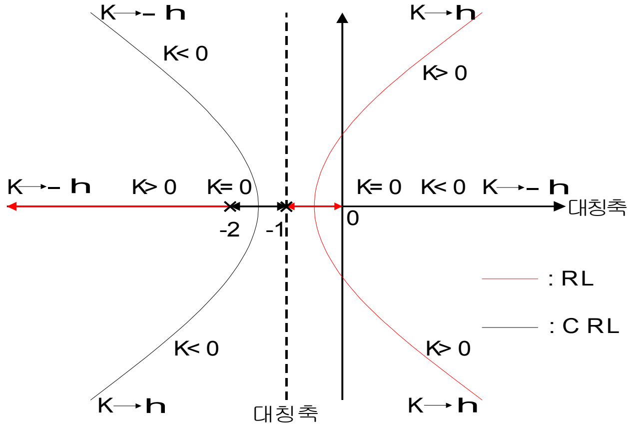


③ 완전 근궤적의 기로의 수 ; 근궤적의 기로의 수는 다항식(특정방정식)의 차수와 같다.

④ 완전 근궤적은 실수축에 대해 대칭이다.
일반적으로 근궤적은 G(s)H(s)의 극점과 영점의 대칭축에 대하여 대칭이다.

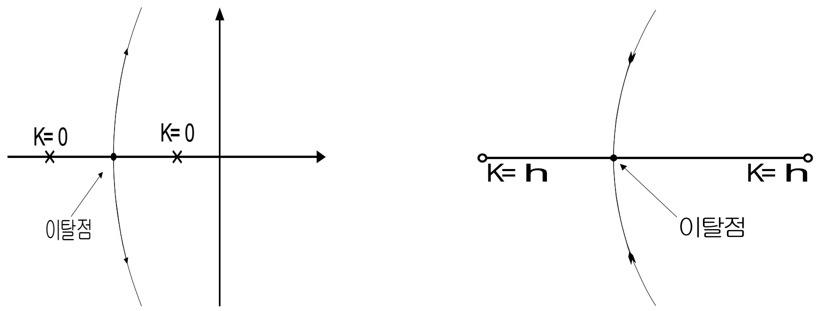
(ex) $S(S+1)(S+2)+K=0$

$$G(s)H(s)=\frac{K}{S(S+1)(S+2)}$$

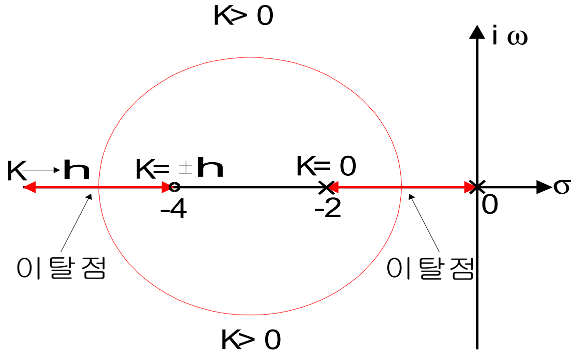


⑤ 완전 근궤적 上의 離脫点 (鞍裝点 : saddle point)

: 어떤 방정식의 근궤적 上 이탈점 혹은 안장점은 그 방정식의 <u>다중근</u>에 대응한다.



(ex) $$G_1(s)H_1(s)=\frac{(S+4)}{S(S+2)}$$



* 근의 감도 (root sensitivity)

: k가 변할 때 특성방정식의 근의 감도

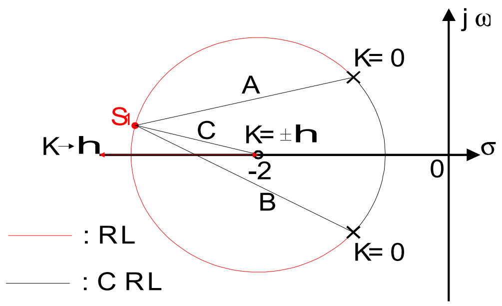
$$S_k = \frac{ds/s}{dk/k} = \frac{k}{s}\,\frac{ds}{dk}$$

이탈점에서 근의 감도는 ∞이다.
따라서 이탈점에서 동작하는 k값을 선택하지 않아야 한다.

이상적으로는, 제어계의 어떤 parameter 변화에 계가 민감하지 않아야 한다.
즉 예를 들어 어떤 계가 임의의 전방이득 k에 대해 만족스럽게 작동하더라도, 이 계가 k 변화에 너무 민감하다면, k가 조금만 변해도 이 계는 불안정해지거나, 불필요한 동작영역으로 바뀐다.
계의 파라메터 변화에 민감하지 않는 계를 강인(强靭: Robust) 계통이라 한다.

* 근 궤적 上에서 k 구하기

(ex) $s^2+2s+2+k(s+2)=0 \qquad 1+\dfrac{k(s+2)}{(s^2+2s+2)}=0$



RL 上의 점 s_1에서의 k는 K = AB / C 로 구해진다.

또 s=0 점에서 k는 $K=-\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=-1$

8.4. 극과 영점의 첨가

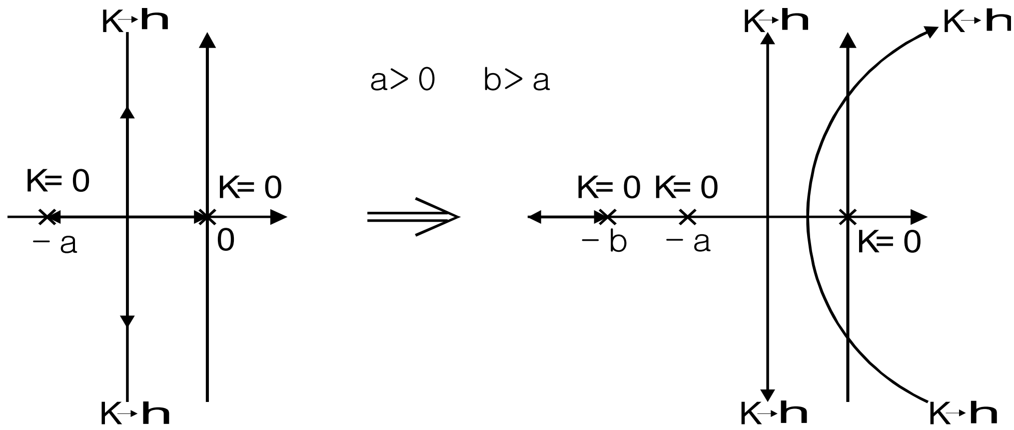
루프전달함수 G(s)H(s)에, s평면 좌반면극을 첨가시키면 근궤적을 우반면쪽으로 이동시키는 효과를 갖는다.

G(s)H(s)에 좌반면 영점을 첨가시키면 근궤적을 좌반면 쪽으로 이동 시키고, 또 좌반면 쪽으로 휘게 하는 효과가 있다.

그러면 상대 안정도는 개선된다.

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+a)}$$

$$\Rightarrow \qquad G(s)H(s) = \frac{k}{s}(s+a)(s+b)$$



극의 첨가로 인한 효과