7. 제어계통의 시간영역 해석

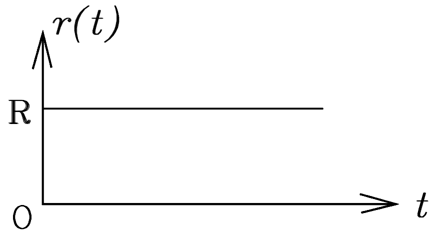
$$C(t) = \underline{c_t(t)} + \underline{c_{ss}(t)}$$

↓ →정상상태응답(steady-state response)

과도응답(transient response) : 계의 성능을 나타냄.

기준입력과 정상상태 응답의 차를 <u>정상상태 편차</u> (steady-state Error)라 한다.

7.2 시간응답의 대표적 검사신호

A) 

$r(t) = RU_s(t)$: 계단입력 (step function)

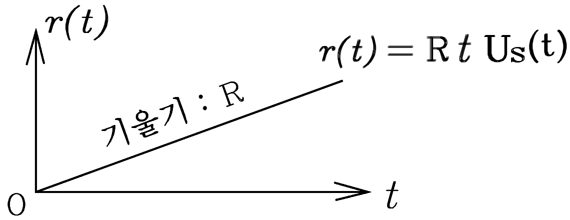
$$r(t) = \begin{cases} R & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

계단함수의 Laplace 변환 R(s) = R/s

; 계의 속응성 조사에 유용한 신호.

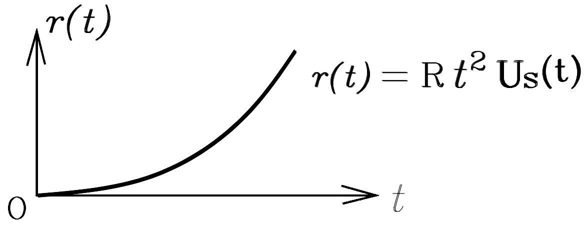
; 광범위한 주파수를 갖는 신호.

B) Ramp 함수



$$R(s) = \frac{R}{s^2}$$

C) Parabolic 함수

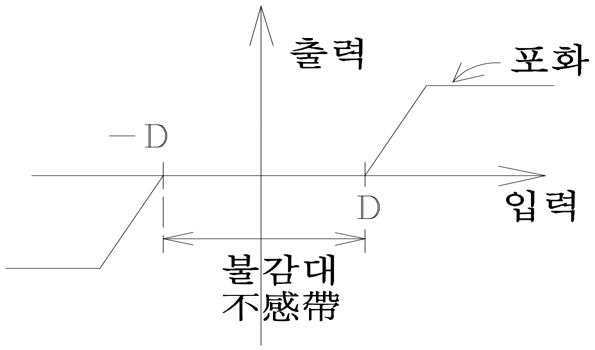


$$R(s) = \frac{R}{s^3}$$

7.3. 정상상태 편차

비선형 계통의 특성

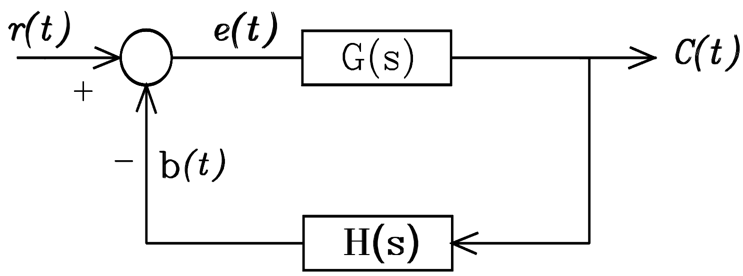
: 대부분의 제어계통의 정상상태 편차는 선형성 마찰이나 불감대(Dead Zone)와 같은 계의 비선형 특성에 의함.



* 선형제어계통의 정상상태 편차

기준입력 r(t)와 출력 c(t)가 동일한 차원이면 편차는 e(t) = r(t) – c(t). 그러나 r(t)와 c(t)가 동일한 차원이 되는 경우는 드물고, 또 불편한 경우도 있다.

궤한 H(s)가 삽입되어



$$e(t) = r(t) - b(t)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)\,C(s)$$

한편 $C(s) = G(s) \cdot E(s)$이므로

$$E(s) = R(s) - H(s)G(s)E(s)$$

$$\therefore \quad E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

궤환 제어계의 정상상태 편차 e_{ss}는 다음과 같이 정의한다.

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t)$$

Laplace 변환의 최종치 정리를 이용.

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} SE(c) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

여기서, 정상상태 편차가 기준입력 R(s)와 루프전달함수 G(s)H(s)에 따라 변화함을 알 수 있다.

* 제어계통의 型

Loop 전달함수 G(s)H(s)의 형태에 따라 제어계의 型 (Type)이 정해진다.

$$G(s)H(s) = \frac{k(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdot\cdot\cdot(1+T_n s)}{s^j(1+t_a s)(1+t_b s)\cdot\cdot\cdot(1+t_n s)}\, e^{-T_d S}$$

(여기서 k, T_i 는 실정수)

페루프 계통의 型은 G(s)H(s)의 s=0에서 극점의 차수를 말한다.

따라서 위 식의 루프전달함수를 갖는 계는 j형이다.

ex) $G(s)H(s) = \dfrac{k(1+0.5s)}{s(1+s)(1+2s)}$; 1형

$G(s)H(s) = \dfrac{k}{s^3}$; 3형

A. 계단함수 입력에 대한 계의 e_{ss}

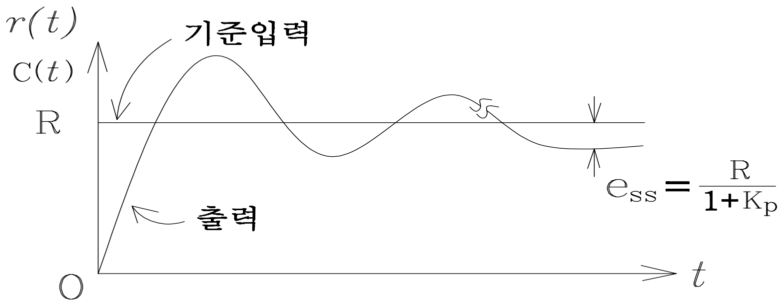
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$ 에서 R(s) = R/s 이므로

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{R}{1+\lim_{s\to 0} G(s)H(s)}$$

편의상 $\underline{K_p} = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$라고 두면,

→ 계단편차상수(step error constant)

$$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$$



(계단입력에 대한 e_{ss})

K_p가 ∞가 되기 위해서는 j가 적어도 1 이상이라야 한다.

그 경우 $e_{ss} = R\,/\,(1+\infty) = 0$

따라서 계단입력에 대한 e_{ss}는

$e_{ss} = R\,/\,(1+K_p)$ (0형 계통의 경우)

$e_{ss} = 0$ (1형 이상의 계통)

으로 결론지을 수 있다.

B. Ramp 입력에 대한 계의 e_{ss}

$r(t) = RtU_s(t)$이고 $R(s) = R/s^2$

$$\therefore e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{R}{S+SG(s)H(s)}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{R}{SG(s)H(s)}$$

여기서 Ramp 편차상수 k_v를

$K_v = \lim_{s\to 0} SG(s)H(s)$ 라고 정의하면

$e_{ss} = R/K_v$

Ramp입력에 대한 e_{ss}

따라서 G(s)H(s)가 0형 계통이면 $e_{ss} = \infty$

″ 1형이면 $e_{ss} = R/K_v$

″ 2형 이상이면 $e_{ss} = 0$

C. 포물선 입력에 대한 e_{ss}

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2} U_2(t) \text{이고}, \ R(s) = R/s^3 ,$$

$$e_{ss} = \frac{R}{\lim_{s \to 0} s^2 G(s) H(s)}$$

포물선 입력에 대한 e_{ss}

포물선 편차상수 K_a

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) H(s) \text{ 라 하면}$$

$$e_{ss} = R / K_a$$

따라서, G(s)H(s)가 0형 계통이면 $e_{ss} = \infty$

1 〃 $e_{ss} = \infty$

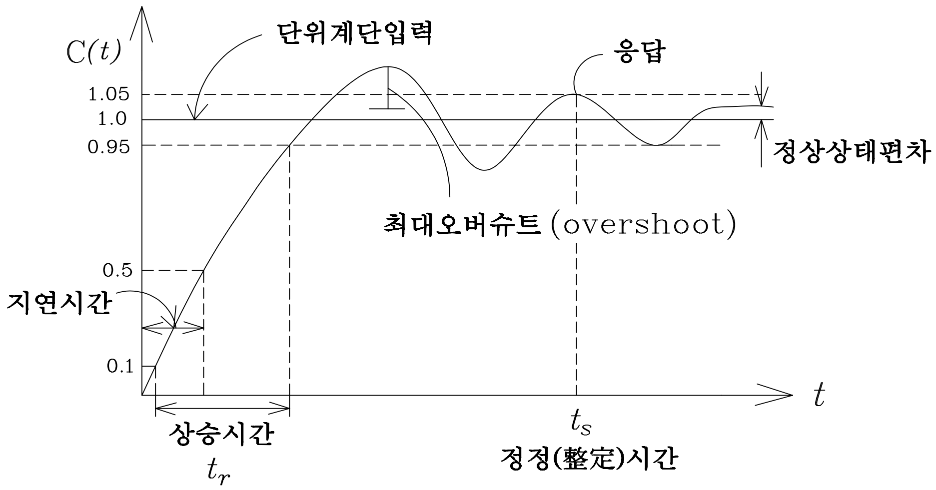
2 〃 $e_{ss} = R / K_a$

3형 이상이면 $e_{ss} = 0$ = 0

7.4. 연속치계통의 시간영역 성능 ; 과도응답

계의 시간응답중 과도응답은 시간이 커질수록 0에 접근한다 (안정계일 경우). 그러나, 과도응답은 어떤 허용범위내의 진폭과 지속시간은 가져야 하므로 제어계의 응답에서 매우 중요한 역할을 한다.

단위 계단입력에 대한 시간응답의 定格化



○ 최대 오버슈트 $= C_{\max} - C_{ss}$

; 계통의 상대적 안정도를 측정하는데 이용함.

; 오버슈트가 큰 계는 바람직하지 못함.

○ 지연시간 (Delay time)

; 계단응답이 최종치의 50%에 도달하는데 필요한 시간

○ 상승시간 (Rise time)

; 응답이 최종치의 10%에서 90% 까지 도달하는데 걸리는 시간

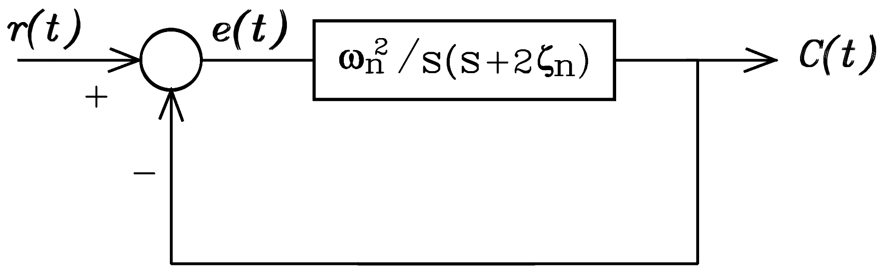
○ 整定시간 (Settling time)

; 응답이 최종치의 5% 내로 되는데 걸리는 시간

7.5 原型 (Prototype) 2차계의 과도 응답

$$G_s = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{w_n^{\ 2}}{S(S+2\zeta W_n)}$$

꼴의 계를 원형 2차계라 한다.



이 계의 폐루프 전달함수 $G_1(s)$ 는

$$G_1(s) = \frac{G}{1+G} = \frac{\dfrac{w_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta w_n)}}{1+\dfrac{w_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta w_n)}}$$

$$= \frac{w_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^{\ 2}}$$

폐루프계통의 특성방정식은

$$s^2+2\zeta w_n s+w_n^{\ 2} = 0$$

단위 계단입력 R(s) = 1/s 에 대한 출력은

$$C(s) = \frac{w_n^{\ 2}}{s(s^2+2\zeta w_n s+w_n^{\ 2})}$$

Laplace 역변환에 의해

$$C(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-s w_n t} \sin(w_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1}\zeta)$$

특성근은

$$s_1, \; s_2 = -\zeta w_n \pm w_n j\sqrt{1-\zeta^2} = -\alpha \pm j w_d$$

α : 제동인자(Damping factor) 또는 제동상수 (Damping constant)

S : 제동比 (damping ratio) $= \alpha / w_n$

w_d : 제동된 주파수(damped freq.) 또는 조건부 주파수(conditional freq.)

w_n : 고유 非제동주파수(natural undamped freq.)

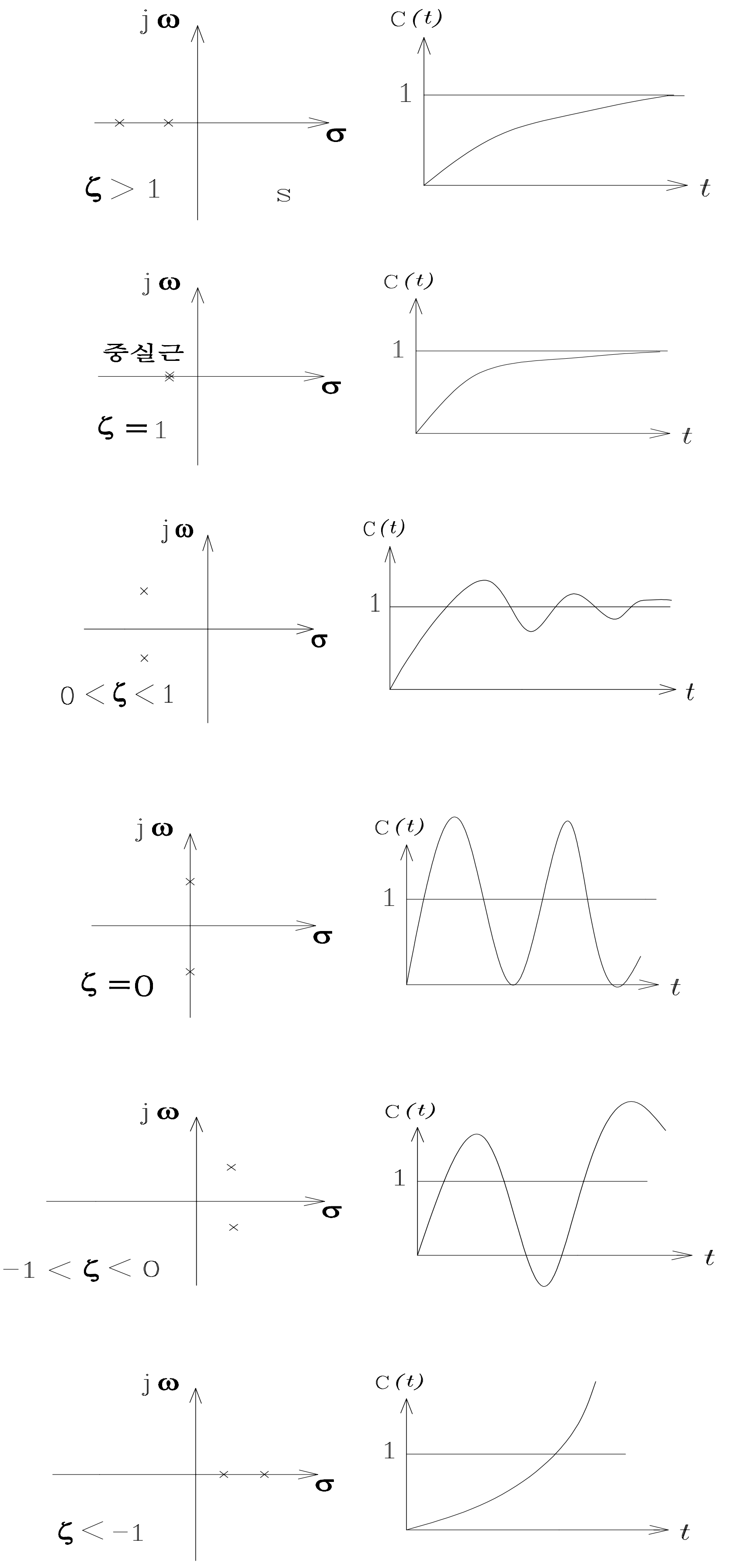
1) 특성방정식의 두 근이 실근이고, 서로 같을 때 즉 s=1 일 때, 이 계를 임계제동(Critically damped)이라 한다.

2) ζ=0 이면 특성근은 허수가 되고 계단응답은 완전한 正弦狀이다.(undamped)

3) 0 $<$ ζ $<$ 1 이면 부족제동(under damped)이라 한다.

4) s > 1 이면 과제동(over damped)

5) s < 0 일 때 負제동(minus damping)
→ 실제 물리 현상에는 존재하지 않음.


jω
σ
ζ > 1
S
C(t)
1
t
중실근
ζ = 1
0 < ζ < 1
ζ = 0
−1 < ζ < 0
ζ < −1

최대 overshoot 가 생기는 시각 $t_{\max}$

$$t_{\max} = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$ (n = 1.3.5.... : overshoot)

(n = 2.4.6.... : undershoot)

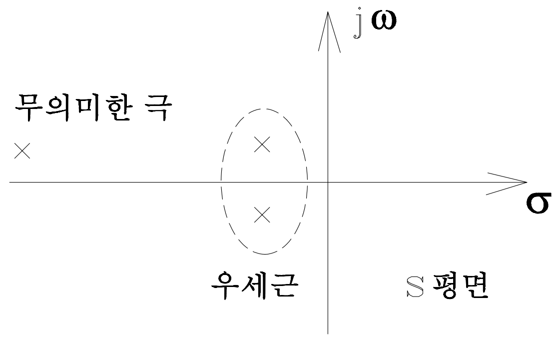
* 優勢根 (Dominant roots)

예를 들어 계의 특성근이 -156.21, -230.33, -3021.8 3개라면 과도해는

$$c_t(t) = 1 + A\cdot e^{-156.21t} + B\cdot e^{-230.33t} + C\cdot e^{-3021.8t}$$

꼴이 되고, 세 번째 항은 매우 빨리 0에 수렴한다. 즉 s 평면 좌측에서 상대적으로 멀리 있는 극은 시간응답에 대한 기여가 적다.

고로 허수축 가까이 있는 근들을 우세근 이라 하고 이들이 과도응답을 주도하게 된다.



무의미한 극을 무시하는 방법

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{10(s/10+1)(s^2+2s+2)}$$

을 예로 들면, 이 3차 계통은

$$\frac{C(s)}{R(s)} \fallingdotseq \frac{10}{10(s^2+2s+2)}$$

으로 근사할 수 있다.

7.7. 전달함수에 극과 영점을 첨가한 효과

- 극과 영점의 첨가나, 전달함수의 필요치 않는 극이나 영점의 제거는 만족할 만한 제어계통의 시 영역 성능을 얻기 위해 흔히 행해진다.

A. 개루프 전달함수에 극의 첨가
: 일반적으로 단위계단응답의 최대 overshoot을 증가시킨다.

B. 폐루프 전달함수에 극의 첨가
: 최대 오버슈트가 감소한다.

C. 폐루프 전달함수에 영점 첨가
: 단위응답의 상승 시간을 감소시키고 최대 오버슈트를 증가시킴.

D. 개루프 전달 함수에 영점 첨가
: 최대 오버슈트를 감소시킴.