6장 . 線形제어 계통의 安定度

상수계수의 선형미방의 동차해 = 계의 과도응답
→ 이는 특성방정식의 근에 좌우됨.

○ 선형제어계통의 설계
= 제시된 출력을 보이도록, 폐루프 전달함수의 극과
영점의 위치를 조절하는 작업

○ 제어계통의 설계에 있어 가장 중요한 요구사항
= 계가 安定 (stable) 해야 한다.

○ 안정도

절대안정도 (Absolute Stability)
- 단지 안정이냐 불안정이냐를 따짐.
상대안정도 (Relative Stability)
- 어느 정도 안정인가를 따짐.

* 선형 시불변계의 전체응답 = 영입력응답 + 영상태응답

○ 영입력응답 ; 초기조건 만으로 나오는 응답 (과도해)
○ 영상태응답 ; 초기조건을 0으로 하고, 입력만에 의한 응답
(정상해)

6.2 유한 입-출력 (BIBO)를 갖는 연속치계통의 안정도

r(t), c(t), g(t)가 각각 선형시불변계의 입력, 출력, 임펄스응답

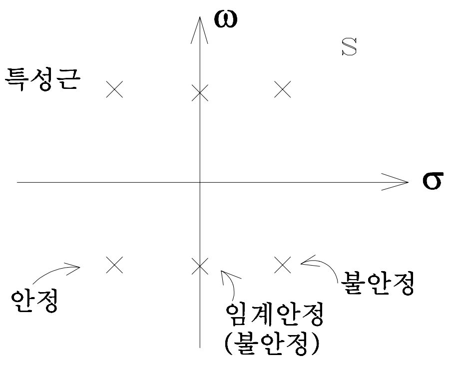
일 때 <u>유한인 입력 r(t)에 대해</u>, 출력 c(t)가 유한이면

그 계통은 <u>BIBO 안정</u> 또는 <u>단지 안정</u>이라 한다.

BIBO (Bounded Input Bounded output)

BIBO 안정조건 = 특성 방정식의 근

(= G(s)의 극점 ; G(s) = B(s)/A(s)에서 A(s) = 0 이특성방정식.)
이 모두 S평면 좌반부에 놓여야 한다.



ex) $G(s) = \dfrac{20}{(s+1)(s+2)(s+3)}$: BIBO 안정

$G(s) = \dfrac{20(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$: S=1 극점으로인 하여 불안정

$G(s) = \dfrac{20(s+1)}{(s+2)(s^2+4)}$: jw 축 위의 극점 으로 인해 한계안정 (불안정)

6.4 선형 연속치 계통의 안정도 판정법

1. Routh – Hurwitz 판별법 (절대안정판별법)
   - 특성근의 위치가 s평면 우반부에 있나를 검사.

2. Nyquist 판별법 (상대안정판별법)
   - S 평면 우반부의, 폐루프 전달함수의 극점과 0 점수의 정보를 제공함.

3. 근 궤적도 (Root Rocus)
   - 변화하는 파라메터에 대한 안정도 판별

4. Bode 선도
   - 전달함수의 크기와 위상을 각 주파수 ω에 대해 그림.

6.5 Routh – Hurwitz 판별법

특성 방정식

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdot \cdot + a_{n-1} s + a_n = 0$$

(모든 계수는 실수)

이 식이 +의 실수부를 갖는 근을 갖지 않기 위한 필요조건 (즉 특성근이 s평면 좌반부에 있을 조건)은

1. 다항식의 모든 계수는 같은 부호라야 함.

2. 모든 항의 계수가 있어야 함이다.

이를 다시 쓰면

$$\frac{a_1}{a_0} = -\sum \text{ 모든 근 } > 0$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \sum \text{ 동시에 취한 두 근의 곱 } > 0$$

$$\frac{a_3}{a_0} = -\sum \text{ 동시에 취한 세 근의 곱 } > 0$$

.

.

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \text{ 모든 근의 곱 } > 0$$ 을 만족하면 된다.

* Hurwitz 판별법

특성근이 s평면 좌반부에 올 필요충분 조건은 Hurwitz 행렬식 D_k (k=1,2 ..n)이 모두 + 값이라야 한다는 것이다.

단, $D_1 = a_1$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

.

.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & \cdot & \cdot & a_{2n-1} \\ 0 & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix}$$

(여기서 n 보다 큰 지수(아래첨자)나 –값의 지수를 갖는 계수는 0으로 취급한다.)

Hurwitz 행렬식 계산은 n이 커지면 매우 힘들게 된다.
이의 개선책으로 Routh – table 작성법이 도입되었다.

○ 6 차 특성방정식의 경우

s^6	a_0	a_2	a_4	a_6
s^5	a_1	a_3	a_5	0
s^4	A	B	a_6	0
s^3	C	D	0	0
s^2	E	a_6	0	0
s^1	F	0	0	0
s^0	a_6	0	0	0
	↑ 확인용 열			

Routh 표의 첫째열 모든 요소가 같은 부호이면 방정식의 근은 모두 s평면 좌반부에 있다.
이 열 요소의 부호 변환 횟수는 s평면 우반부에 있는 근의 수 (즉 + 의 실수부를 갖는 근의 수)를 나타낸다.

* Routh 표의 A, B ... F 와 Hurwitz 행렬식과의 관계

$$a_1 = D_1 , \quad A = \frac{D_2}{D_1} , \quad C = \frac{D_3}{D_2}$$

$$E = \frac{D_4}{D_3} , \quad F = \frac{D_5}{D_4} , \quad a_6 = \frac{D_6}{D_5}$$

$$B = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} , \quad D = \frac{A a_5 - a_1 a_6}{A}$$

ex) 특성방정식 $s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$

Routh 표

s^3	1	1	0
s^2	−4	6	0
s^1	2.5	0	0
s^0	6	0	0

이 표에서, 1열에 두 번의 부호 변화가 있으므로 이 방정식은 s평면 우반부에 두 개의 근이 있다.

ex) $2s^4 + s^3 + s^2 + 5s + 10 = 0$

s^4	2	3	10
s^3	1	5	0
s^2	−7	10	0
s^1	6.43	0	0
s^0	10	0	0

이 표에서도, 1열에 두 번의 부호 변화가 있으므로 s평면 우반부에 두 개의 근이 있다.

Routh 표를 만들지 않고도, 컴퓨터를 이용하면 모든 근을 정확히 구할 수 있고, 이 경우, Routh – Hurwitz 판별법은 별 소용이 없는 것이 된다.

ex) $s^3+3ks^2+(k+2)s+4=0$ 에서 이 계가 안정일 k의 조건을 구하라.

Routh 표는

s^3	1	k+2
s^2	3k	4
s^1	{3k(k+2)-4} / 3k	0
s^0	4	

안정조건에서 k>0 이고 3k(k+2) -4>0 이다.

즉, k>0 이고 { $3ks^2+6k-4$} > 0,
(k+2.528) (k-0.528) >0 ,
k < -2.528 또는 k > 0.528

따라서 <u>k > 0.528</u> 일 때 계는 안정이다.