5장. 線型動的系統의 상태변수 해석

n차의 동적계통의 상태방정식

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i[\,x_1(t), x_2(t), \cdot\cdot\cdot, x_n(t) \qquad \text{상태변수}$$

$$, r_1(t), \cdot\cdot r_p(t), \cdot\cdot \qquad \text{입력}$$

$$w_1(t), \cdot\cdot\cdot\ w_v(t)\,] \qquad \text{外亂}$$

$$(i = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, n)$$

出力 방정식 (out equation)

$$C_j = g_j[\,x_1(t), x_2(t), \cdot\cdot, x_n(t), r(t), \cdot\cdot$$

$$, r_p(t), w_1(t), \cdot\cdot, w_v(t)\,]$$

이상의 상태방정식과 출력방정식을 합쳐서, 동적방정식 (Dynamic equation)이라고 한다.
표현과 연산을 쉽게 하기 위해 vector 행렬식을 도입하면

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad r(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_p(t) \end{bmatrix} \quad C(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ c_q(t) \end{bmatrix} \quad W(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ w_v(t) \end{bmatrix}$$

상태 vector 입력 vector 출력 vector 외란 vector

이 때 상태방정식은 $\frac{dx(t)}{dt} = \mathrm{f}\,[\,X(t), r(t), W(t)\,]$

출력방정식은 $\mathrm{C(t)} = g[\,X(t), r(t), W(t)\,]$

선형시불변계에 대하여서는, 이를 다시

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathrm{AX(t) + Br(t) + FW(t)}$$

$$\mathrm{C(t) = DX(t) + E_r(t) + HW(t)}$$ 로 쓸수 있다.

5.3. 상태천이 행렬

상태천이 행렬식은 선형동차 상태방정식을 만족하는 행렬로 정의된다.

$dx(t) / dt = AX(t)$; 선형동차 상태방정식 (A)

여기서 $\phi(t)$를 상태천이 행렬을 나타내는 n×n 행렬이라고 하면

$d\phi(t) / dt = A\phi(t)$를 만족해야 한다.

또 x(0)를 t=0에서 초기값이라 하면, $x(t) = \phi(t) \times (0)$으로 정의된다.

이 x(t)를 다른 방법으로 구하면 (Laplace 변환)

(A) 식에서

$$SX(s) - x(0) = A \times (s)$$

$$\therefore \quad X(s) = (SI - A)^{-1} \times (0)$$

Laplace 역변환을 취하면

$$x(t) = L^{-1}[(SI - A)^{-1}] \times (0) \quad (t \geq 0) \times (0) \quad (t \geq 0)$$

따라서, $\underline{\phi(t) = L^{-1}[(SI - A)^{-1}]}$

$$L^{-1}[(SI - A)^{-1}] = e^{At}$$

$$= 1 + At + \frac{At^2}{21} + \cdot \cdot \cdot$$; (Maclaurin 급수전개)

따라서 $\phi(t) = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3}A^3t^3 + \cdot \cdot$

상태천이 행렬은 동차상태방정식의 해이므로 이는 그 계통의 자유응답(Free Response)을 나타낸다.

5.4 상태천이 방정식

상태천이 방정식은 선형 비동차 상태방정식의 해로 정의된다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathrm{AX(t) + Br(t) + FW(t)}$$

양변에 Laplace 변환을 취하면

$$\mathrm{SX(s) - x(0) = AX(s) + BR(s) + FW(s)}$$

$$\therefore \mathrm{X(s)} = (SI - A)^{-1} \times (0) + (SI - A)^{-1}[BR(s) + Fw(s)]$$

양변에 Laplace 역변환을 취하면

$$\phi(\mathrm{t}) \times (0) + \int_0^t \phi(t-\tau)[Br(\tau) + Fw(\tau)]d\tau$$

5.5 상태방정식과 고차미방 사이의 상호관계

고차미분방정식 (단일변수 시불변계 지배방정식)

$$\frac{d^n c}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} - \cdot\cdot\cdot\ a_2 \frac{dc}{dt} + a_1 c(t) = \mathrm{r(t)}$$

이에 대한 상태 방정식은

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3, \cdot\cdot\cdot,$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_1 x_1 - a_2 x_2 \cdot\cdot\cdot a_n x_n + \mathrm{r(t)}$$

$$\mathrm{c(t)} = x_1(t)$$

Vector 표시로는 dx(t) / dt = AX(t) + Br(t)

이러한 꼴의 상태방정식을 위상변수 표준형이라 한다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

또 출력 방정식은 C(t) = DX(t)

$$D = [\ 1\ 0\ 0 \cdot\cdot\cdot 0\ ]$$

5.7 상태방정식과 전달함수의 관계

동적방정식

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Br(t) + Fw(t)$$

$$C(t) = DX(t) + Er(t) + HW(t)$$

Laplace 변환에 의해

$$X(s) = (SI - A)^{-1} \times (0) + (SI - A)^{-1}[BR(s) + Fw(s)]$$

$$\begin{aligned} C(s) &= DX(s) + ER(s) + HW(s) \\ &= [D(SI - A)^{-1}B + E]R(s) \\ &\quad + [D(SI - A)^{-1}F + A]W(s) \end{aligned}$$

(여기서 전달함수의 정의에 의해 초기조건을 0으로 놓음.
즉 x(0) = 0)

따라서 , $\underline{G_r(s)} = D(SI - A)^{-1}B + E$

: w=0 일 때, r(t)와 c(t) 사이의 전달함수 행렬

$\underline{G_w(s)} = D(SI - A)^{-1}F + H$

: r=0 일 때, w(t)와 c(t) 사이의 전달함수 행렬

라고 하면

$C(S) = Gr(s)R(s) + Gw(s) \cdot W(s)$ 가 된다.

5.8 특성 방정식과 고유치

선형시불변계를 나타내는 미분방정식

$$\frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdot\cdot\cdot\, a_1(t)$$

$$b_{n+1} \frac{d^n r}{dt^r} + \cdot\cdot\cdot\, b_1 r(t)$$

모든 초기조건 = 0으로 하고 양변을 Laplace 변환하면

$$(s^n + a_n s^{n-1} + \cdot\cdot + a_2 s + a_1) C(s)$$
$$= (b_{n+1} s^n + \cdot\cdot + b_1) R(s)$$

위 식의 좌변 계수항을 0으로 놓으면

$$\underline{s^n + a_n s^{n-1} + \cdot\cdot + a_2 s + a_1 = 0}$$

이것을 계의 특성방정식(characteristic equation)이라 한다.

한편 앞에서 구한 $G_r(s)$에서

$$\mathrm{Gr(s)} = D\frac{adj(SI - A)}{|SI - A|} B + E$$
$$= D\frac{[adj(SI - A)]B + |SI - A|E}{|SI - A|}$$

< *adj* D : adjoint matrix (수반행렬) >

이 때 $\underline{|SI - A| = 0}$ 이 바로 특성 방정식이 된다.

* (참고) 역행렬 구하기

A의 역행렬 A^{-1}는 $A^{-1} = adjA \ / \ |A|$

$$adjA = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

단, M_{ij}는 A_{ij}의 소행렬식

(i 행과 j 열을 제외한 행렬식)

ex) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 일때

$$adjA = \begin{bmatrix} a_{22}a_{23} - a_{23}a_{32} & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{13} - a_{13}a_{32} \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

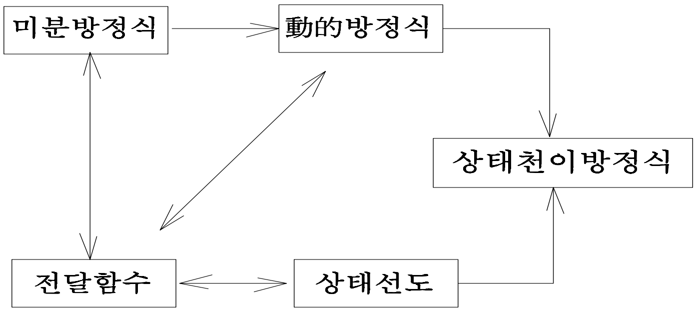
이고 $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$
$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

$$\therefore \ \underline{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adjA}$$

* <u>고유치</u> (Eigenvalue)

특성방정의 근을 행렬 A의 <u>고유치</u>라 한다.
앞에서 A를 위상변수 표준형으로 쓸 때 그 특성 방정식의 계수는 A행렬의 마지막 행 요소로써 구성됨을 알 수 있다.

5.9 전달함수의 分解 (Decomposition)



선형 계통을 서술하는 방법들과 그 상호관계.

전달함수의 분해 = 전달함수로부터 상태선도나 상태방정식을 구하는 과정

- 직접 분해 (Direct Decomposition)
- 종속 분해 (Cascade 〃)
- 병렬 분해 (Paralled 〃)

○ 직접 분해 - 인수형태가 아닌 전달함수에 적용.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}$$ 을 예로 들면

1) 전달함수를 S에 관한 (-) 역으로 표현한다.

즉, $$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_0 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2}}{b_0 + b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2}}$$

2) 분모 분자에 가상변수 X(s)를 곱한다.

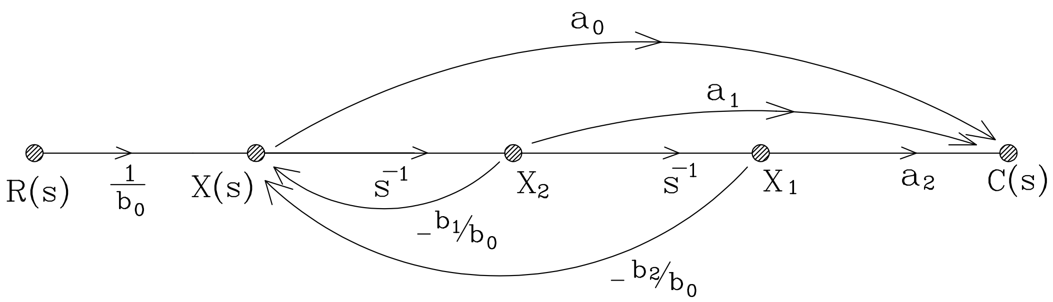
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_0 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2}}{b_0 + b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2}} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

3) $C(S) = (a_0 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2})X(s)$

$R(S) = (b_0 + b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2})X(s)$로 둔다.

4) $X(s) = \frac{1}{b_0}R(s) - s^{-1}\frac{b_1}{b_0}X(s) - s^{-2}\frac{b_2}{b_0}X(s)$

따라서 상태선도는



상태방정식은

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b_2}{b_0} & -\frac{b_1}{b_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r(t)$$

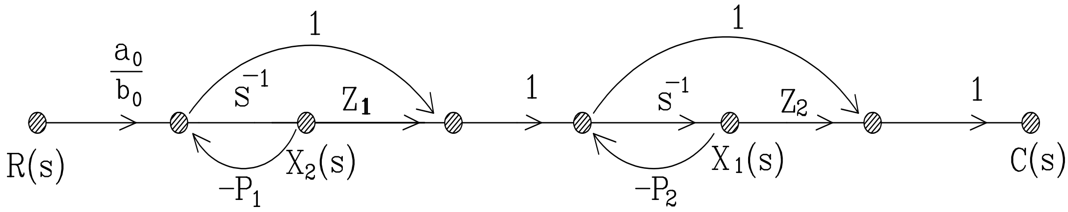
출력 방정식은

$$C(t) = \left(a_2 - \frac{a_0 b_2}{b_0}\right)x_1(t) + \left(a_1 - \frac{a_0 b_1}{b_0}\right)x_2(t) + \frac{a_0}{b_0}r(t)$$

○ 종속분해 - 인수형식을 갖는 전달함수에 적용

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{s+z_1 s+z_2}{s+p_1 s+p_2}$$

상태선도

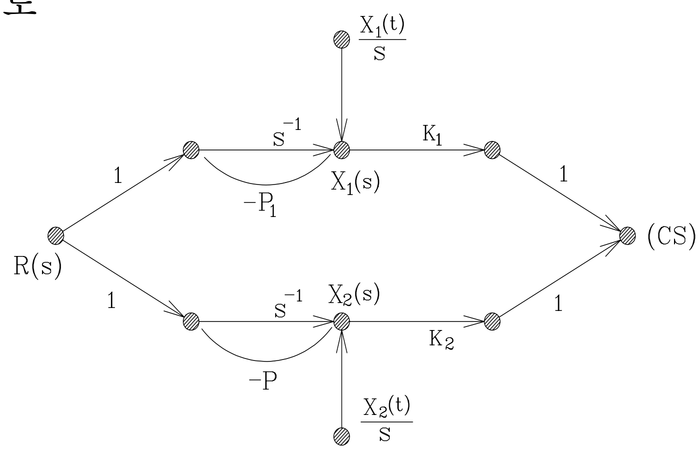


○ 병렬분해 - 전달함수의 분모가 인수형식일 때
부분분수로 전개함.

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{p(s)}{(s+p_1)+(s+p_2)}$$

$$= \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2}$$

상태선도



상태방정식

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r(t)$$

출력방정식

$$C(t) = [\ k_1 \quad k_2\ ] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

5.10 선형계통의 가제어성

$$\dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$C(t) = Dx(t) + Eu(t)$$

에서 이 계가 완전한 가제어성이 되기 위해서는 다음의 n × nr 행렬이 n의 rank를 갖는 것이 필요・충분조건이다.

$$S = [\ B\ \ AB\ \ \ A^2B\ \ \cdot\ \cdot\ \ A^{n-1}B\ ]$$

단, A : n × n 행
B : n × r 행렬
D : p × n 행렬
E : p × r 행렬
x(t) : n × 1 상태 vector
u(t) : r × 1 입력 vector
c(t) : p × 1 출력 vector

5.11 선형 계통의 가관측성

- 모든 상태변수가 출력 일부에 영향을 미칠 때 그 계는 완전가관측이다.
- 만일 상태 변수의 어느 하나가 출력의 측정으로 관측될 수 없으면 그 계통은 완전히 (또는 단지) 관측되지 않는다라고 말한다.

계통이 완전 가관측이 될 조건은 (필요충분조건)

$$V = [\ D' \ \ A' D' \ \ (A')^2 \cdot \cdot \ \ (A')^{n-1} \ D' \ ]$$

행렬이 n의 Rank를 가져야 한다.

(참고) ; Rank : 행렬 A의 Rank는 A의 선형독립인 열의 최대수이다.
(또는 A에 포함되 있는 최대 정칙 행렬의 차수이다.)

(참고) ; A' (전치행렬)