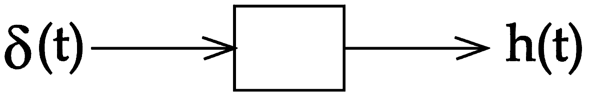
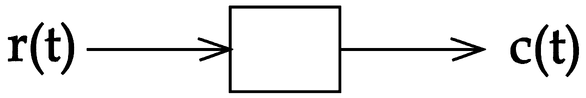
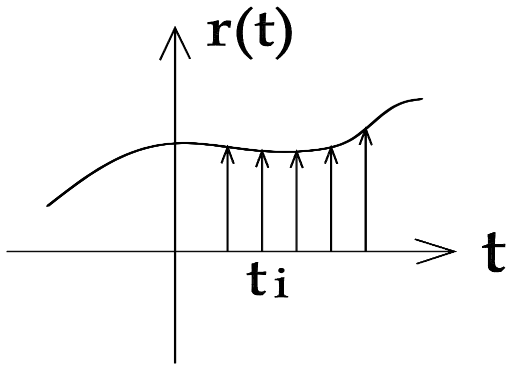
3장. 전달함수, 블록선도 및 신호흐름 선도

3.2. 선형계의 Impulse 응답, 전달함수



: impulse response function





$r(t) = \sum r(t_i)\delta(t - t_i)\triangle t$ 로 근사

$$c(t) = \sum r(t_i)h(t - t_i)\triangle t = \int_{-\infty}^{t} r(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$c(t) = \int_{-\infty}^{t} r(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \gamma(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

양변을 Laplace 변환하면 C(S) = R(S) H(S)

C(S) / R(S) = H(S) ; 전달함수.
즉, H(S)는 $h(t)$의 Laplace 변환이다.

○ 전달함수의 특성

1. 전달함수는 오직 선형-시불변계에만 정의된다.(非線形계에서는 정의안됨)
2. 전달함수는 Impulse Response 의 Laplace 변환이다.
3. 계의 모든 초기조건은 0으로 하고 전달함수를 구한다.
4. 연속치 계통의 전달함수는 S만의 함수이다.

○ 전달함수 = G(s) = $\frac{C(S)}{R(S)}$

특성 방정식 (Characterisric Equation)
R(S) = 0 . 이 근들을 特性根 이라한다.

ex) 다음 선형 시불변계의 전달함수를 구하라.

$$\frac{d^3c(t)}{dt^3} + 10\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 2\frac{dc(t)}{dt} + c(t) + 2\int_0^t C(z)dz$$
$$= \frac{dr(t)}{dt} + 2r(t)$$

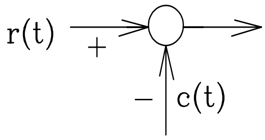
양변을 Laplace 변환하면

$$S^3C(s) + 10S^2C(s) + 2SC(s) + C(s) + 2C(s)\frac{1}{s}$$
$$= SR(S) + 2R(S)$$

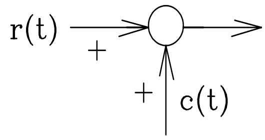
$$C(S)(S^4 + 10S^3 + 2S^2 + S + 2) = R(S)S(S+2)$$

$$\therefore \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{S(S+2)}{(S^4 + 10S^3 + 2S^2 + S + 2)}$$

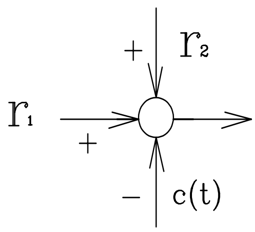
3-3. 블록 선도 (block diagram)



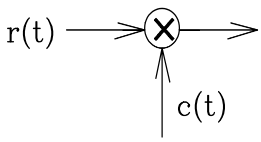
$e(t) = r(t) - c(t)$: 差의 블럭선도



$e(t) = r(t) + c(t)$: 合의 블럭선도

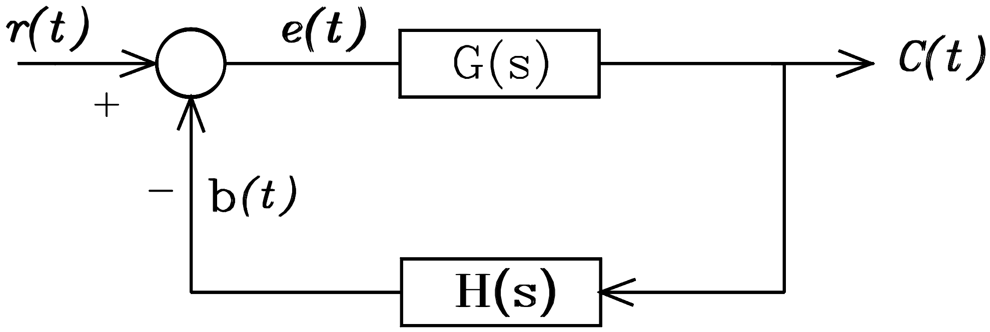


$e(t) = r_1(t) + r_2(t) - c(t)$: 합과 차의 블럭선도



$e(t) = r(t)\ c(t)$: 곱의 블럭선도

* Feedback System 의 기본 블록선도



- G(S) : 전방경로 전달함수
- H(S) : Feedback 전달함수
- G(S)H(S) : Loop 전달함수
- $\dfrac{C(S)}{R(S)}$: 폐루프전달함수 $= \dfrac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$

ex) $G(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{S+1} & \frac{-1}{s} \\ \frac{2}{1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$ $H(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 일 때,

M(S)를 구하라.

(sol) ; $1 + G(S)H(S) = 1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{-1}{s} \\ \frac{2}{1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

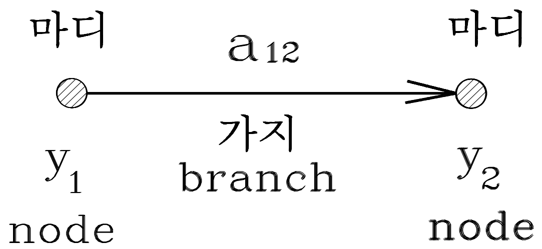
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{-1}{s} \\ \frac{2}{1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{-1}{s} \\ \frac{2}{1} & \frac{s+3}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ M(S) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{-1}{s} \\ \frac{2}{1} & \frac{s+3}{s+1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{-1}{s} \\ \frac{2}{1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{s(s+1)}{s^2+5s+2} \begin{bmatrix} \frac{3s^2+9s+4}{s(s+1)(s+2)} & \frac{-1}{s} \\ \frac{2}{1} & \frac{3s+2}{s(s+2)} \end{bmatrix}$$

3.4. 신호 흐름선도

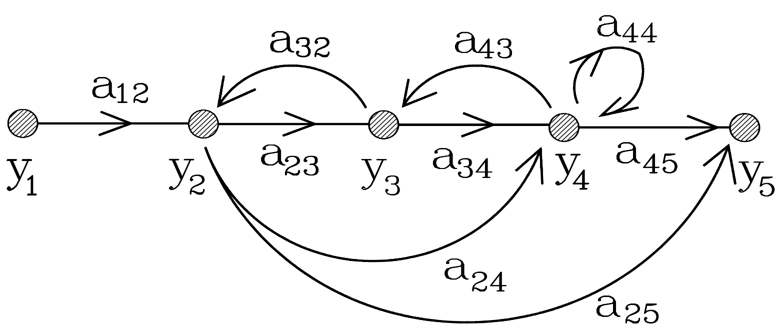


(y_2의 y_1에 대한 의존관계를 나타냄 그 逆은 성립하지 않음.)

ex)

$$
\left.
\begin{aligned}
y_2 &= a_{12}\, y_1 + a_{32}\, y_3 \\
y_3 &= a_{23}\, y_2 + a_{43}\, y_4 \\
y_4 &= a_{24}\, y_2 + a_{34}\, y_3 + a_{44}\, y_4 \\
y_5 &= a_{25}\, y_2 + a_{45}\, y_4
\end{aligned}
\right\rangle
$$

연립대수 방정식에대한 신호흐름선도



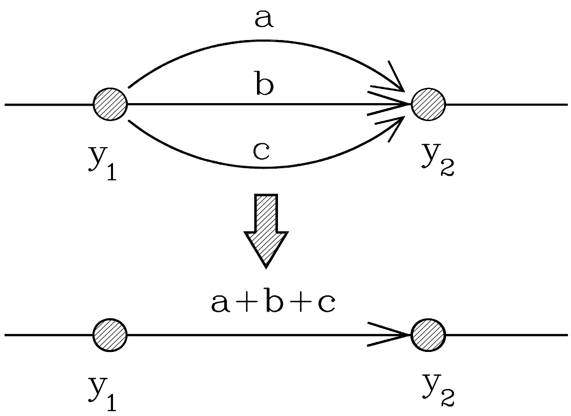
기본성질

1. 신호흐름 선도는 線形系에만 적용
2. 그리는데 쓰이는 방정식은 대수방정식이라야 함.
3. 마디는 변수를 나타냄.
4. 신호는 가지의 화살표 방향으로만 이동함.
5. $y_i = a_{kj}\, y_k$ 에서, y_k에 a_{kj}(가지이득)이 곱해져 y_i에 전달됨. 그 역은 성립 않음.

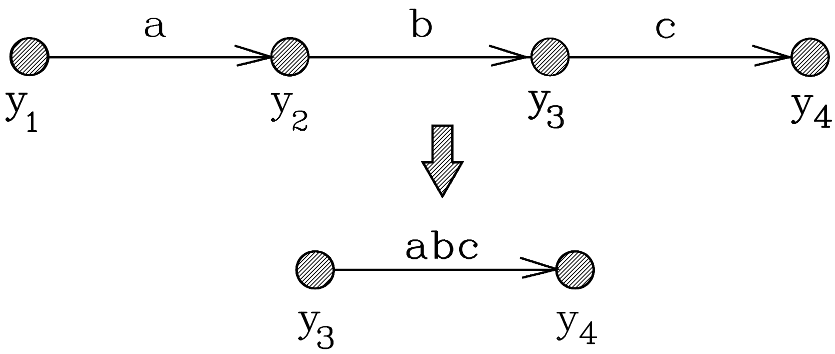
○ 경로 이득 :

- 전방경로이득 : 각 경로 이득의 곱.
- 루프이득 : 각 Loop 이득의 곱.

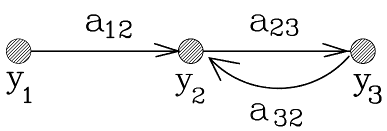
○ 병렬 가지



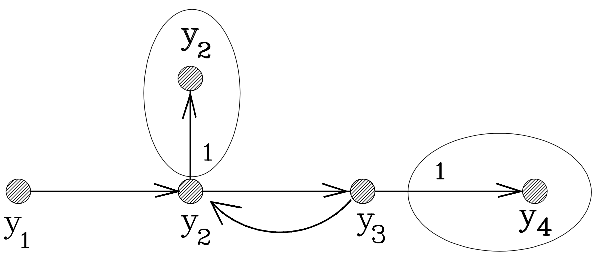
○ 직렬 가지



ex)



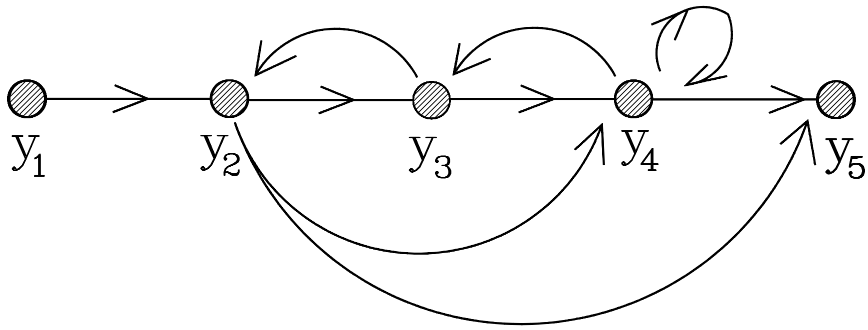
: y_2, y_3 모두 출력 마디가 될 수 없음.



→ 과 같이 이득 1인 가지를 만들어 y_2, y_3 를 출력 마디로 만들 수 있다.

* 경로 (path) : 같은 방향으로의 연속적인 가지들의 집합

경로
- 전방경로(forward path) ; 입력마디에서 출발하여 출력마디에서 끝나는 경로
- Loop ; 어느 마디도 한번만 거쳐야 한다.



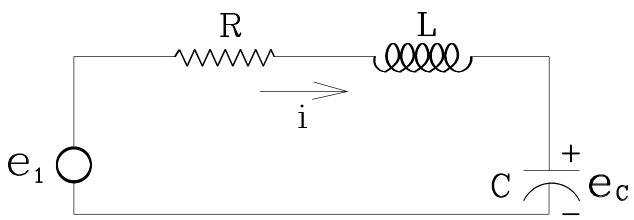
이 선도에서 y_1과 y_5 사이에는 3개의 전방경로가 있다.

Loop : 같은 마디에서 시작하여 같은 마디에서 끝나는 경로,
다른 마디는 한번 이상 거치면 안됨.
ex) 위 예에서 Loop는 4개 있음.

ex) 신호흐름선도 그리기 例

$$L\frac{di}{dt} = e_1 - Ri - e_c$$

$$C\frac{de_c}{dt} = i$$



위 두식은 대수방정식이 아니므로 신호흐름 선도를 그릴 수 없다.

따라서 이들을 대수방정식으로 만들기 위해 Laplace변환을 취하면

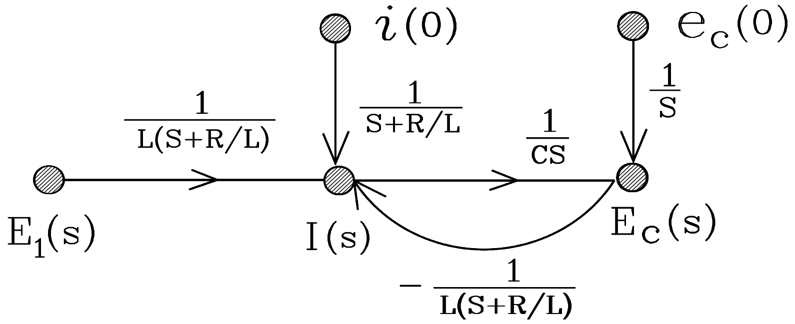
$$SI(s) = i(0) + \frac{1}{L}E_1(s) - \frac{R}{L}I(s) - \frac{1}{L}E_c(s)$$

$$SE_c(s) = e_c(0) + \frac{1}{c}I(s)$$

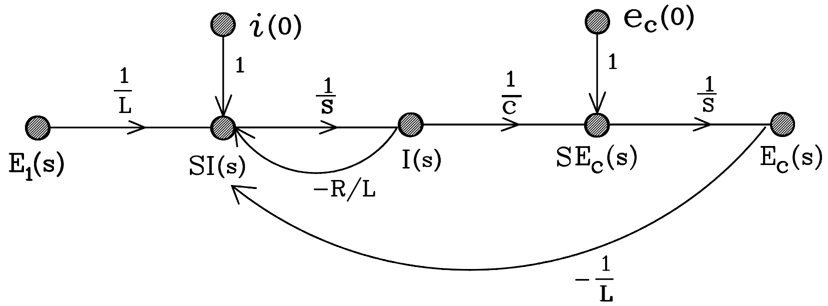
가 되고 $i(0)$, $e_c(0)$ 는 t=0 때 $i(t)$와 $e_c(t)$ 의 초기치이다.

$$I(s) = \frac{1}{S+R/L}i(0) + \frac{1}{L(S+R/L)}E_1(s) - \frac{1}{L(S+R/L)}E_c(s)$$

$$E_c(s) = \frac{1}{s}e_c(0) + \frac{1}{cs}I(s)$$



이 예의 선도를 다르게 그리면



과 같이 그릴 수 있다.

이 선도에서는 Laplace 변수는 1/S꼴로만 나타난다.

그러므로 이 선도는 아날로그 또는 디지털 컴퓨터의 해의 기본으로 쓰일 수 있고, 이런 꼴의 신호흐름 선도를 상태선도 (state diagram)이라 한다.

3.9. 신호흐름 선도의 일반이득 공식

$$M = \frac{y_{out}}{y_{in}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{M_k \triangle_k}{\triangle}$$ (Manson 의 이득공식)

y_{in} : 입력마디 변수

y_{out} : 출력마디 변수

M : y_{in}과 y_{out} 사이의 이득

M_k : y_{in}과 y_{out} 사이의 R번째 전방경로 이득

$$\triangle = 1 - \sum_m P_{m1} + \sum_m P_{m2} - \sum_m P_{m3} \cdots$$

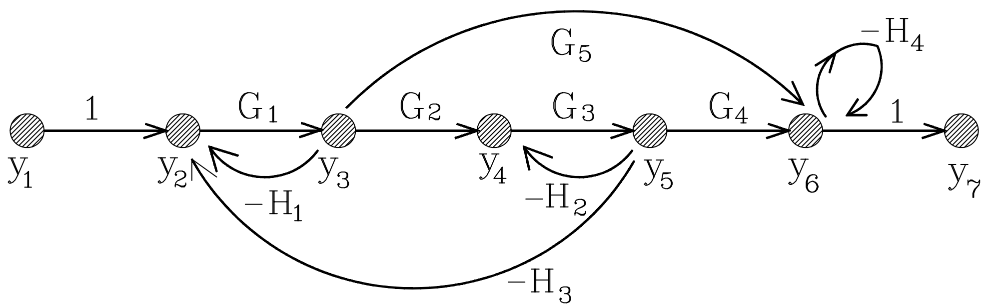
P_{mr} : γ 개의 비접촉 루프의 가능한 m번째 조합의 이득 곱
(신호흐름선도의 두 부분이 공통 마디를 공유하지 않으면 비접촉임)

혹은,

$\triangle$ = 1 - (모든 각각의 루프의 이득의 합)
+ (두 개의 비접촉 Loop의 가능한 모든 조합의 이득의 합)
- (세 개의 ......)

$\triangle_k$ = k 번째 전방 경로와 접촉하지 않는 신호흐름 선도에 대한 $\triangle$

ex)



$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1 + G_3 H_2 + H_4 + + G_3 H_2 H_4}{\triangle}$$

$$\frac{y_4}{y_1} = \frac{G_1 G_2 (1 + H_4)}{\triangle}$$

$$\frac{y_6}{y_1} = \frac{y_7}{y_1} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5 (1 + G_3 H_2)}{\triangle}$$

단

$$\begin{aligned} \triangle = 1 &+ G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_3 + H_4 \\ &+ G_1 H_1 G_3 H_2 + G_1 H_1 H_4 + G_3 H_2 H_4 \\ &+ G_1 G_2 G_3 H_3 H_4 + G_1 H_1 G_3 H_2 H_4 \end{aligned}$$

3.11. 상태선도

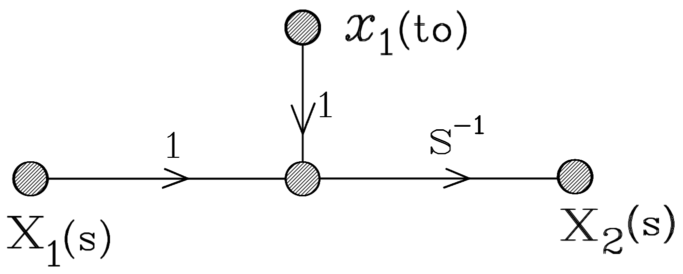
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

이 식을 $t_0 \sim t$사이에 적분하면 $x_1(t) = \int_{t_0}^{t} x_2 dz + x_1(t_0)$

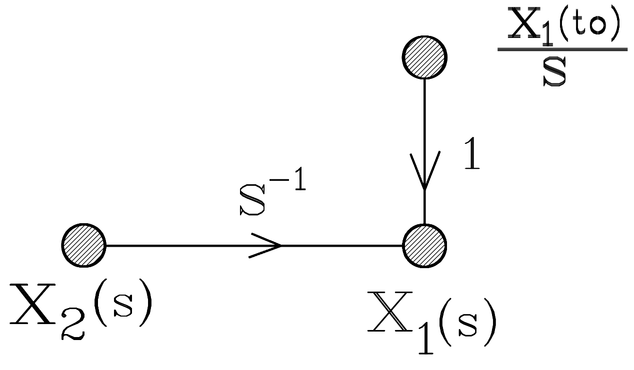
양변을 Laplace 변환하면

$$X_1(S) = L\left[\int_0^t x_2(\tau)d\tau\right] - L\left[\int_0^{t_0} x_2(\tau)d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s}$$

$$= \frac{1}{s} X_2(S) + \frac{x_1(t_0)}{S} \quad (\tau \geq t_0)$$



또는



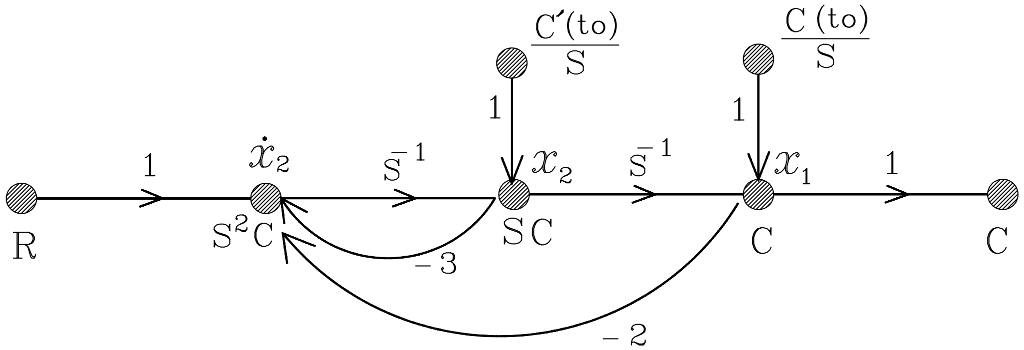
로 표시 가능하다.

* 미분 방정식으로부터 상태선도 구하기

ex) $\dfrac{d^2c}{dt^2}+3\dfrac{dc}{dt}+2c(t)=r(t)$

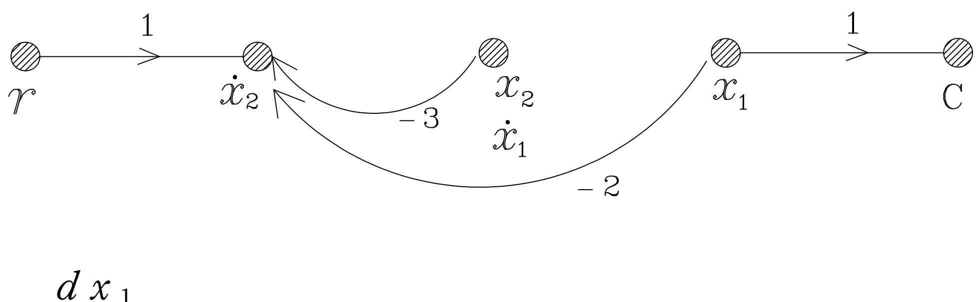
이를 바꿔쓰면 $\dfrac{d^2c}{dt^2}=-3\dfrac{dc}{dt}-2c(t)+r(t)$

양변을 Laplace 변환, $s^2C(s)=-3sC(s)-2C(s)+R(s)$



< 위 식에 대한 상태선도 >

이 그림에서 초기상태와 적분기 가지를 제거하면 상태 방정식을 얻을 수 있다.



$$\frac{dx_1}{dt}=x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt}=-3x_2-2x_1+r(t)$$