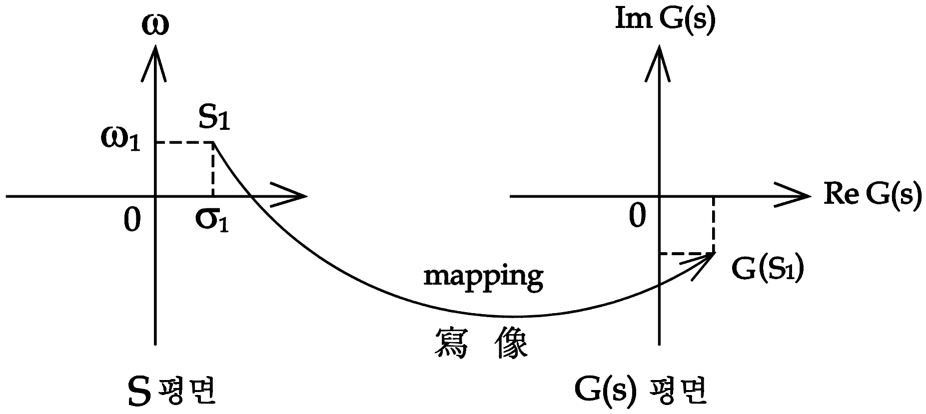
2장.

복소변수함수



○ 解析 함수 (Analytic Function)

- 어떤 함수와, 그 도함수들이 모두 S평면내의 임의 영역 R에서 존재할 때 그 함수는 R내에서 해석적(Analytic)이라고 한다.

ex) $G(S)=\frac{1}{S(S+1)}$ 일 때

G(S)는 S=0, S=-1을 제외한 모든 곳에서 해석적이다.

ex) G(S) = S+2일 때 G(S)는 S평면 모든 곳에서 해석적이다.

○ 特異點 (Singular Point)과 極 (Pole)

$$G(s)=\frac{10(s+2)}{s(s+1)\ (s+3)^{2}}$$

G(S)는 S=0, S=-1에서 단순극을 갖고, S=-3에서 2차의 극을 갖는다. 또, S=-2에서 단순 영점을 갖는다.

한편 $\lim_{s\to\infty} G(S)=\frac{10}{S^{3}}=0$ 이고, S = ∞에서 3개의 영점을 갖는다.

즉, 이 함수는 전 S평면에서 4개의 극과 4개의 영점을 갖는다.

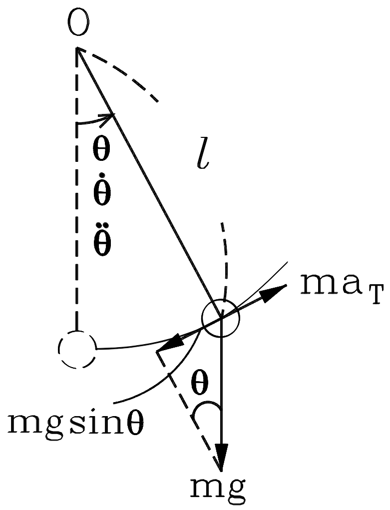
2.3. 미분 방정식

○ $Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{c}\int i(t)dt=V(t)$; <RLC 직렬회로망>

(저항, 인덕턴스, 캐퍼시터)

○ $M\ddot{y}+B\dot{y}+Ky=f(t)$; <Mass-Dampa-Spring 계>

* 單振子(Simple Pendulum)



$a_T=l\ddot{\theta}$

$ma_T=-mgsin\theta$ (힘의 평형식)

$ml\ddot{\theta}+mg\sin\theta=0$

$\therefore\ \ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$ (線形化)

$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

* n계미방 → n개의 1계 미방으로 분해

ex) $M\ddot{y}+B\dot{y}+ky=f(t)$는

$x_1(t)=y(t)$ 라두면 , $x_2(t)=\dot{y}(t)$ 라 두고

$M\dot{x}_2+Bx_2+kx_1=f(t)$ 이를 다시 정리하면

$\dot{x}_1=x_2$

$\dot{x}_2=\frac{1}{M}f(t)-\frac{B}{M}x_2-\frac{k}{M}x_1$

과 같이 2개의 1계미방으로 분해 가능하다.

이런 꼴의 n개의 1계미방을 제어이론에서는 상태방정식(state eq) 이라하고 x_1, x_2 를 상태변수(state variable)이라 한다.

2.4. Laplace 변환

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

특징 ; 미방 → 대수 연산으로 대치

○ 因果律（ Causality ）

$\int_0^\infty \sim$: One-sided Laplce Transform   ; t = 0 이전의 모든 정보는 0으로 간주함. 실제 물리界에서는 t=0에서 入力이 가해지고,응답은 t = 0 이전에는 있을 수 없다. 즉 입력보다 앞서는 출력은 없다는 것이 바로 인과율(Causality)이다.

☆ $\int_{0-}^\infty$ 과 같이 ~ $t = 0^-$ 에서정의된 Laplace 변환은 t=0에서 불연속인 함수나 t=0에서 Impulse 入力도 취급할수 있다.

ex) $f(t) = u_s(t)$ 단위 계단함수

$$F(s) = \int_0^\infty u_s(t)\, e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st} \right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-\infty} - 1 \right] = \frac{1}{s}$$

ex) $f(t) = e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0)$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t} dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha + s}\left[e^{-(\alpha+s)t} \right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{\alpha + s}\left[e^{-\infty} - 1 \right] = \frac{1}{s+\alpha}$$

○ Laplace 역변환

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, e^{st} ds$$

※ 중요 정리 f(t) ↔ F(s) : Laplace Transform Fair

① $L[kf(t)] = kF(s)$

② $L\,[af_1 \pm bf_2] = aF_1(s) \pm bF_2(s)$

③ $L\,[f'''(t)] = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$

④ $L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$

⑤ $time\ \ shifting\ L\,[f(t-T)] = e^{-ts}F(s)$; 제2 $shifting$정리

⑥ $\mathrm{Lim}_{t\to 0} f(t) = \mathrm{Lim}_{s\to\infty} sF(s)$; 초기치 정리

⑦ $\mathrm{Lim}_{t\to\infty} f(t) = \mathrm{Lim}_{s\to 0} sF(s)$; 최종치 정리

⑧ $s-shifting\ L[\ e^{\mp\alpha t}f(t)] = F(s\pm\alpha)$; 제1 $shifting$정리

⑨ $L\left[\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)d\tau\right] = F_1(s) \cdot F_2(s)$

→ convolution

○ 부분분수 전개

① $$X(s)=\frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{-1}{s+1}+\frac{7}{s+2}\frac{-6}{s+3}$$

② $$X(s)=\frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}+\frac{-1}{s+1}+\frac{0}{(s+1)^2}+\frac{-1}{(s+1)^3}$$

③ $$X(s)=\frac{w_n{}^2}{s^2+2sw_ns+\ w_n{}^2}=\frac{\frac{w_n^2}{2iw}}{s+a-jw}-\frac{\frac{w_n{}^2}{2iw}}{s+a+jw}$$

※ 선형 상미방의 Laplace 해법

$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=5\ u_s(t)$, 초기조건 $(x(0)=-1,\ \dot{x}(0)=2)$

$$s^2X(s)-s\,x(0)-\dot{x}(0)+3s\,X(s)-3\,x(0)+2X(s)=\frac{5}{s}$$

$$\therefore\quad X(s)=\frac{-\ s^2-s+5}{s(s+1)(s+2)}=\frac{\frac{5}{2}}{s}-\frac{5}{s+1}+\frac{\frac{3}{2}}{s+2}$$

$$\therefore\quad x(t)=\underbrace{\frac{5}{2}\ u_s(t)}_{\text{정상상태 解}}\ -\ \underbrace{5\ e^{-t}+\frac{3}{2}\ e^{-2t}}_{\text{과도 解}}$$