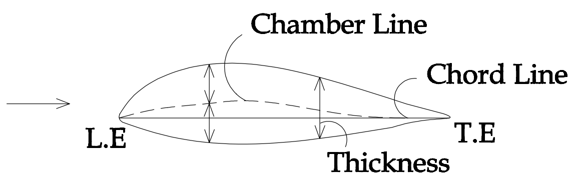
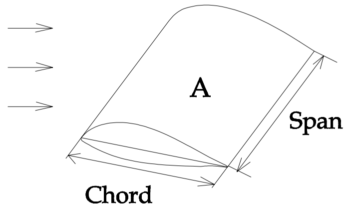
4. 3차원 wing (유한폭 wing)



(2차원 Wing)



(3차원 Wing)

Fig. 13

$$\Lambda = \frac{s}{c} = \frac{A}{c^2} = \frac{s^2}{A}$$

실제의 wing은 유한폭(span)을 가진 3차원 wing이다. 이 경우 양쪽 wing tip에서는 상・하면의 압력차에 의해 밑에서 위로 흐름이 새게(Leak) 된다. 이 흐름은 하나의 vortex filament를 만들어 하류로 흘러간다.

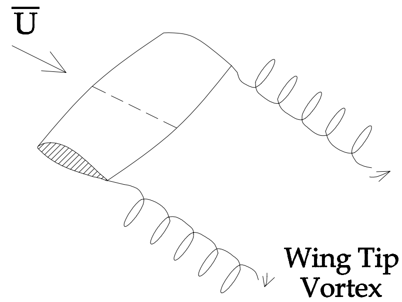


Fig. 14

그 결과 Fig. 14와 같이 한 쌍의 free vortex를 형성한다. 보잉-747의 경우 이 tip vortex는 매우 강하여 보잉기가 착륙 후, 활주로에는 상당시간 이 tip vortex가 남아 있어, 다음에 착륙하는 경비행기에 심한 요동을 줄 수 있다.
tip vortex들에 의해 wing 부근에 하향 유속이 유기된다.

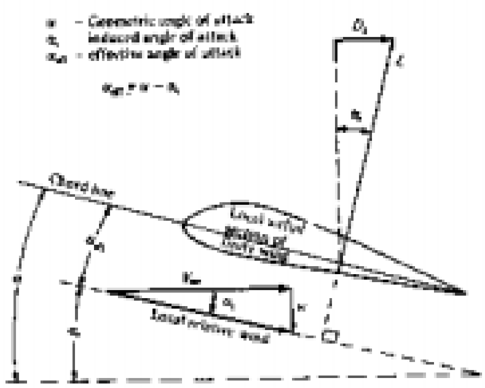


Fig.15

Fig. 15에서와 같이 이 하향흐름 (down-wash)에 의해 입사류 $\overline{U}$ 의 방 향이 $\Delta\alpha$ 만큼 줄어들게 되어 결과적인 앙각은

$$\alpha_{eff} = \alpha - \Delta\alpha \quad (4.1)$$

이 된다.

그 결과 양력도 free stream과 직각

방향에서 $\varDelta\alpha$ 만큼 경사되어 작용하고 L 의 sine 성분

$$D_i = L\sin\varDelta\alpha \tag{4.2}$$

은 wing에 작용하는 抗力(Drag)이 된다. 이 D_i 를 誘導抗力(induced drag)이라고 한다.

이 유도항력은 항력이지만 유체의 점성과는 무관한 종류의 힘이다. 따라서 유도항력은 이상유체 中의 potential 이론으로 계산이 가능하다.

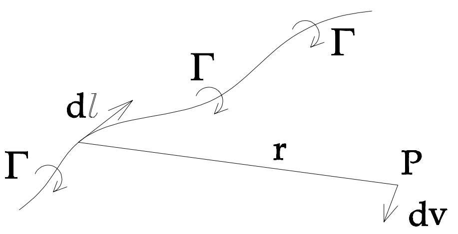


Fig. 16 Vortex Filament

4.1 Biot-Savart 법칙

Fig. 16과 같이 무한히 계속되는 한 vortex filament의 요소 dl 에 의해 임의점 P에 유기되는 유기속도는

$$dv = \frac{\varGamma}{4\pi}\frac{dl\times\gamma}{|\gamma|^3} \tag{4.3}$$

이 식을 Biot-Savart 법칙이라 한다.

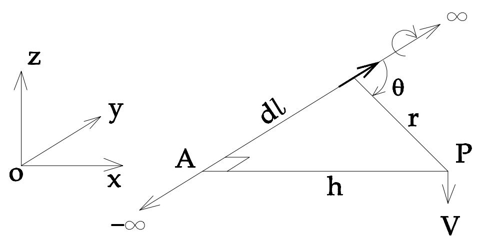


Fig. 17

이제 Fig. 17과 같이 y 축 상에 강도 $\varGamma$ 인 vortex filament가 있다고 하고, 그 요소 dl 에 의해 점 P에 유기되는 하향속도는 식 (4.3)으로 표시되고 전체 filament에 의한 유기속도는

$$V = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varGamma}{4\pi}\frac{dl\times\gamma}{|\gamma|^3} \tag{4.4}$$

$$= \frac{\varGamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\theta}{\gamma^2}\,dl \tag{4.5}$$

여기서

$$\gamma = \frac{h}{\sin\theta} \tag{4.6}$$

$$l = \frac{k}{\tan\theta} \tag{4.7}$$

이라 하면

$$dl = -\frac{h}{\sin^2\theta}\,d\theta \tag{4.8}$$

따라서

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\theta}{\gamma^2}\,dl = \frac{\Gamma}{4\pi h}\int_{\pi}^{0}\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi h} \tag{4.9}$$

따라서 A점에서 ∞까지 잇는 半 filament에 의한 유기속도는

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h} \tag{4.10}$$

가 된다.

비점성, 비압축성 흐름에 있어 vortex filament의 개념을 처음으로 도입한 것은 독일의 수학자요 물리학자이며 내과의사였던 Hermann von Helmholtz였다. 그는 vortex 이론에 있어 다음과 같은 Helmholtz vortex theorem을 제창하였다.

1. vortex filament의 강도는 그 길이 방향으로 일정하다.
2. vortex filament는 유체 中에서 끝이 날 수 없다.

즉 유체의 경계(이는 ±∞에 있을 수 있다)에서 끝나거나, 또는 폐곡선을 형성해야 한다.

4.2 Prandtl의 Lifting-Line 이론

유한폭의 wing에 대한 이론적 해법은 1911～1918년 사이 독일의 Göttingen 대학의 Prandtl에 의해 처음으로 제시되었다.

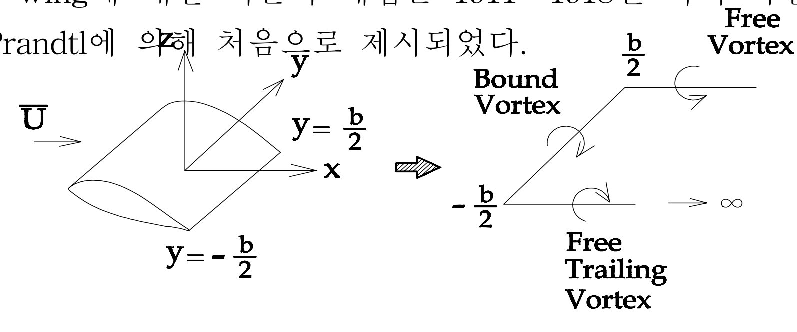


Fig. 18

Prandtl은 Fig. 18과 같이 유한폭의 wing을 하나의 vortex system으로 치환하였다. 이와 같은 모양의 vortex system은 마치 말의 징(horse-shoe,馬?)

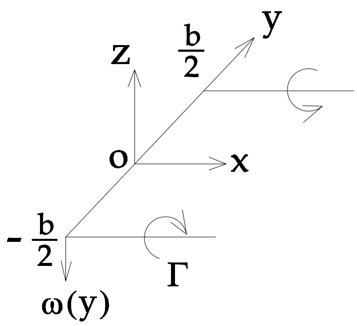


Fig. 19

과 같아, 이름을 horse-shoe-vortex라 붙였다.

Fig. 19와 같이 Bound vortex 가운데에 원점을 잡고, bound vortex 上의 임의의 점 y에 있어서, 두 free vortex (강도 Γ)에 의해 유기되는 속도 $w(y)$는 (4.10)식에 의해

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi\left(\frac{b}{2}+y\right)} - \frac{\Gamma}{4\pi\left(\frac{b}{2}-y\right)} \qquad (4.11)$$

이를 다시 쓰면

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{b}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \qquad (4.12)$$

이 결과를 보면 양 tip에서 $w\left(\pm\frac{b}{2}\right) \rightarrow -\infty$가 되어 실제의 유한폭 wing과 동떨어진 결과가 된다.

이로 인해 초기에 Prandtl과 그 동료들은 많은 고민을 하였고, 나중에 간단히 해결책을 찾아냈다.

즉 wing을 한 개의 horseshoe vortex로 표기하지 않고 강도가 각각 다른 여러 개의 horseshoe vortex들을 y축 상에 배치하는 것이다.

이를 Lifting line이라고 한다.

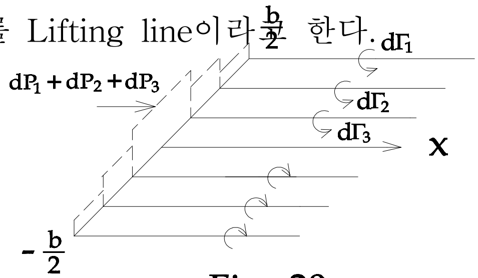


Fig. 20

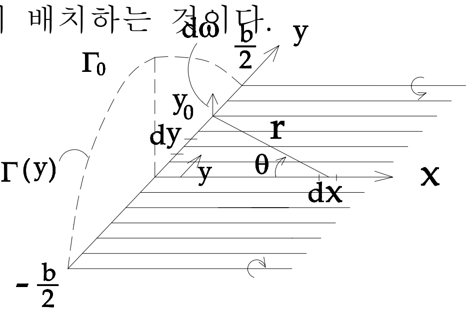


Fig. 21

즉 Fig. 20에서 y축이 Lifting line이 된다. 이제 무한히 많은 horseshoe vortex들을 y축 상에 분포시키면 Fig. 21과 같이 연속적으로 변하는 bound vortex를 얻는다.

y축 상에 임의위치 y에 있는 요소 dy에서 순환의 변화량은

$$d\Gamma = \left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy$$

이제 y에 위치한 반 무한 trailing vortex에 의해 y_0에 유기되는 속도 dw는

$$dw = -\frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{4\pi(y_0 - y)} \tag{4.13}$$

그러면 전체 trailing vortex에 의해 y_0점에 유기되는 속도 w는

$$w(y_o) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{y_0 - y} \tag{4.14}$$

Fig. 15에서 y_0 위치의 wing 단면에서 유기앙각 $\Delta\alpha$는

$$\Delta\alpha(y_0) = \tan^{-1}\left(-\frac{w(y_0)}{\overline{\mathrm{U}}}\right) \tag{4.15}$$

작은 유기앙각이라 가정하면

$$\Delta\alpha(y_0) = -\frac{w(y_0)}{\overline{\mathrm{U}}} \tag{4.16}$$

(4.14)식을 (4.16)식에 대입하면

$$\Delta\alpha(y_0) = \frac{1}{4\pi\overline{\mathrm{U}}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{y_0 - y} \tag{4.17}$$

$y = y_0$ 단면에서 양력계수는

$$\begin{aligned} C_L &= f_\alpha \cdot [\,\alpha_{eff.} - \alpha_{L=0}\,] \\ &= 2\pi[\,\alpha_{eff.} - \alpha_{L=0}\,] \end{aligned} \tag{4.18}$$

박익이론에 의해 양력계수 $f_\alpha = 2\pi$로 한다.

한편 Kutta-Joukowski 정리에 의해

$$L' = \frac{1}{2}\rho\overline{\mathrm{U}}^2 c(y_0)\,C_L = \rho\overline{\mathrm{U}}\,\Gamma(y_0) \tag{4.19}$$

이므로

$$C_L = \frac{2\Gamma(y_0)}{\overline{\mathrm{U}}\,c(y_0)} \tag{4.20}$$

이를 (4.18)식에 대입하면

$$\alpha_{eff} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi\overline{\mathrm{U}}\,c(y_0)} + \alpha_{L=0} \tag{4.21}$$

또한 $\alpha_{eff} = \alpha - \Delta\alpha$ 에서 $\alpha = \alpha_{eff} + \Delta\alpha$ 이므로

$$\therefore\ \alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi\overline{\mathrm{U}}\,c(y_0)} + \alpha_{L=0} + \frac{1}{4\pi\overline{\mathrm{U}}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{y_0 - y} \tag{4.18}$$

이 식이 Prandtl의 양력선 이론에 대한 기본식이다.

이 식은 Integro-differential Equation으로 미지수는 Γ뿐이다.

따라서 이 식을 풀면 $-\frac{b}{2}$ 에서 $\frac{b}{2}$ 사이의 순환의 분포 $\Gamma = \Gamma(y_0)$ 을 구할 수 있다. 이 $\Gamma(y_0)$ 을 알면 유한폭 wing에 대한 다음과 같은 값들을 구할 수 있다.

1. wing에서의 양력분포

$$L'(y_0) = \rho\overline{\mathrm{U}}\,\Gamma(y_0) \tag{4.19}$$

2. 위 식을 span에 걸쳐 적분하면 총양력 L 을 구할 수 있다.

$$L = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} L'(y)\,dy = \rho\overline{\mathrm{U}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y)\,dy \tag{4.20}$$

따라서

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho\overline{\mathrm{U}}^2 S} = \frac{2}{\overline{\mathrm{U}}S}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y)\,dy \tag{4.21}$$

(S : Reference Area = wing의 경우 = platform area)

3. 단위 span 当의 Induced Drag는

$$D_i' = L_i'\sin\Delta\alpha \tag{4.22}$$

$\Delta\alpha$가 작으므로

$$D_i' = L_i' \cdot \varDelta\alpha \tag{4.23}$$

따라서 wing 전체의 총 유도항력은

$$D_i = \rho \overline{\mathrm{U}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \varDelta\alpha(y)\, dy \tag{4.24}$$

또

$$C_{D,i} = \frac{2}{\overline{\mathrm{U}} S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \varDelta\alpha(y)\, dy \tag{4.25}$$

여기서 $\varDelta\alpha(y)$ 는 (4.17)식으로 구한다.

4.3 Elliptical Lift 분포

wing의 순환분포가

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \tag{4.26}$$

과 같은 경우 y축 상에서 Lift 분포는 Fig. 21과 같은 elliptical이다.

이 경우 down wash는

$$w(y) = -\frac{\Gamma_0}{2b} \tag{4.27}$$

로 wing의 span 상에서 일정하다.(elliptical lift wing의 경우)

이 때 유도앙각은

$$\varDelta\alpha = -\frac{w}{\overline{\mathrm{U}}} = \frac{\Gamma_0}{2b\overline{\mathrm{U}}} \tag{4.28}$$

즉 유도앙각 또한 span 상에서 일정하다.

또 양력 L 은

$$L = \rho \overline{\mathrm{U}} \Gamma_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy \tag{4.29}$$

$$= \rho \overline{\mathrm{U}} \Gamma_0 \cdot \frac{b}{4} \pi \qquad (4.30)$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho \overline{\mathrm{U}}^2 S} = \frac{b\pi}{2\overline{\mathrm{U}} S} \Gamma_0 \tag{4.21}$$

따라서

$$\Delta\alpha = \frac{S}{b^2\pi} C_L = \frac{C_L}{\pi\Lambda} \qquad (4.22)$$

(Λ : Aspect ratio)

또

$$C_{D,i} = \frac{{C_L}^2}{\pi\Lambda} \qquad (4.23)$$

을 얻는다.

이 (4.23)식은 매우 중요한 의미를 갖는다. 즉 elliptical lift wing의 경우 유도항력계수는 양력계수의 제곱에 비례한다. 이는 당연한 일로, Induced drag은 앞서 설명했듯이, wing tip vortex의 결과로 발생하고, wing tip vortex는 tip의 상・하면의 압력차에 의해 발생하기 때문이다. 또한 Lift도 상・하면에서 압력차에 의한 것이므로 이들이 직접 비례하는 것은 너무 당연한 일이라 할 것이다.

분명 날개는 공짜로 양력을 발생시킬 수는 없다. 즉 wing의 유도항력을 극복하기 위해서 비행기 엔진에서 발생하는 power는 바로 양력을 얻는데 대한 보상인 것이다. 또한 C_{Di}는 C_L의 제곱에 비례하므로 C_L이 큰 경우, 즉 비행기가 낮은 속도로(이착륙과 같은 경우) 움직일 때 C_L의 값이 커지므로 C_{Di}값은 매우 커진다. 따라서 비행기의 총저항 중 유도항력은 매우 큰 몫을 차지한다. 심지어 매우 고속인 순항속도 비행에서도 유도항력은 전체 항력의 25%를 차지하는 것으로 알려져 있다.

또 하나 중요한 사실은 유도항력이 종횡비 Λ에 반비례한다는 것이다. 따라서 유도항력을 줄이려면 종횡비 Λ를 최대로 키워야 한다. 이는 구조 역학적으로 제한이 되고, 적정의 Λ를 선택하게 된다.

1903년 Wright Flyer는 $\Lambda = 6$ 이었고, 현대의 아음속 항공기는 $\Lambda = 6 \sim 8$ 이다.(예외로 U-2기는 $\Lambda = 14.3$ 임)

sailplane에서는 Λ=10~22 정도이다.

끝으로 elliptical lift 분포를 얻으려면 wing planform이 elliptical이라야 한다.

그 이유는 한 local section에서

$$C_l = 2\pi(\alpha_{eff} - \alpha_{L=0}) \qquad (4.24)$$

이고,

따라서 단위 span 실 양력 $L'(y)$ 는

$$L'(y) = q_\infty c(y) \cdot c_l \tag{4.25}$$

따라서

$$c(y) = \frac{L'(y)}{q_\infty \cdot c_l} \tag{4.26}$$

(※ $q_\infty = \frac{1}{2}\rho \overline{\mathrm{U}}^2$: Freestream dynamic pressure)

이고 q_∞, c_l은 span 上에서 elliptical하게 변하므로 chord $c(y)$도 elliptical하게 변화하게 되는 것이다.

4.4 일반적 양력분포의 wing

이제 양력분포가 일반적으로 다음 식과 같은 Fourier sine 급수로 표시된다고 하자.

$$\Gamma(\theta) = 2b\overline{\mathrm{U}} \sum_{n=1}^{N} A_n \sin n\theta \tag{4.27}$$

여기서 A_n은 미지수이고 (4.27)식은 (4.18)식을 만족해야 한다.

그러면 최종적으로

$$C_L = A_1 \cdot \pi \Lambda \tag{4.28}$$

$$C_{D,i} = \frac{{C_L}^2}{\pi \Lambda}(1+\delta) \tag{4.29}$$

를 얻는다. 여기서

$$\delta = \sum_2^N n\left(\frac{A_n}{A_1}\right)^2$$

이제 span efficiency factor e를

$$e = (1+\delta)^{-1} \tag{4.30}$$

으로 정의하면 e는 1보다 큰 값이 되고,

$$C_{D,i} = \frac{{C_L}^2}{\pi e \Lambda} \tag{4.31}$$

이 된다. $\delta = 0$ 즉 $e = 1$이면 elliptical 양력분포가 되고 따라서 elliptical wing이 가장 유도항력이 작다는 것을 알 수 있다.

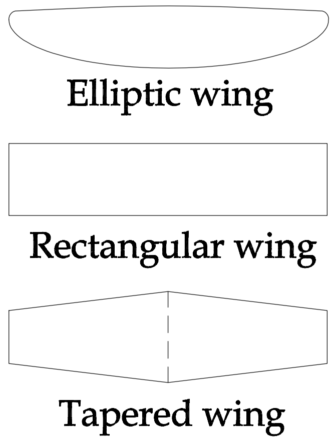


Fig. 22

그러나 Fig. 22에서 보듯이, elliptical wing은 제작이 매우 힘들어 4각형 wing이 만들어졌고 이 두 개를 절충한 Tapered wing이 보편화되었다.

5. Lifting Surface Theory(Vortex Lattice Method)

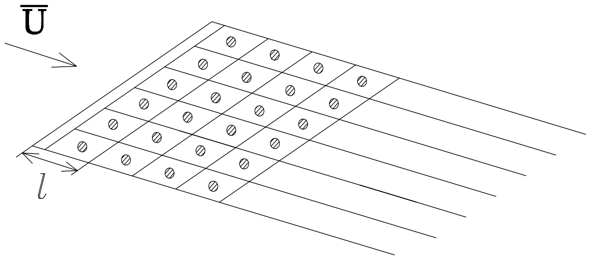


Fig. 23

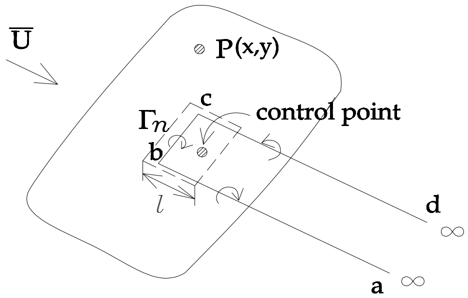


Fig. 24

Fig. 23 과 같이 wing 표면에 각각 다른 강도 Γ_n을 갖는 horse-shoe -vortex들을 분포시킨다.

Fig. 24 는 그 한 요소를 예시한 것으로 요소 bc가 panel의 앞부분에서 $\frac{l}{4}$ 되는 곳에 오게 배치한다. Control point(wing 경계조건을 적용하는 위치)는 panel의 앞부분에서 $\frac{3}{4}l$되는 곳에 잡는다. 그러면 wing 上의 임의의 점 $P(x, y)$에서 이 한 horseshoe vortex에 의해 유기되는 속도는 Vortex Filament ab, bc, cd를 따로따로 Biot-Savart 법칙에 의해 구할 수 있다.

결국 wing 표면 전체를 n개의 vortex panel로 만들 수 있고, 각 vortex 강도 Γ_n을 미지수로 하여, 경계조건(법선속도=0)을 적용하면 control point 들에 관한 연립 방정식을 풀 수 있게 된다. 그 결과 Γ_n이 구해진다.

이를 Vortex Lattice Method라 한다.